Musterlösung zu Blatt 8

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

29 a) 1. Möglichkeit:

Es gilt:

$$\frac{i^n}{1+ni} = \frac{\frac{i^n}{n}}{\frac{1}{n}+i} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{0+i} = 0$$

2. Möglichkeit:

Es gilt:

$$\left|\frac{i^n}{1+ni}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{i^n}{1+ni} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

b) Es gilt

$$\left|\frac{e^{2n}}{(3+4i)^n}\right| = \left(\frac{e^2}{5}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,,$$

d.h. die Folge $\left(\frac{e^{2n}}{(3+4i)^n}\right)$ divergiert.

c) Es gilt

$$\frac{n^2}{(4+5i)n^2+(3+i)^n} = \frac{\frac{n^2}{(3+i)^n}}{(4+5i)\frac{n^2}{(3+i)^n}+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{0+1} = 0\,,$$

denn:

$$\left|\frac{n^2}{(3+i)^n}\right| = \frac{n^2}{(\underbrace{\sqrt{10}}_{>1})^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

30 Umformen des Nenners

$$z^3+z^2+4z+4 = z^2(z+1)+4(z+1) = (z+1)(z^2+4) = (z+1)(z-2i)(z+2i)$$

liefert den Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{(2+i)z^2+2z+4i}{z^3+z^2+4z+4} = \frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2i}+\frac{C}{z+2i}$$

mit Lösung $A=i$, $B=C=1$.

31 a) i) Wie bei Folgerung 1.9 aus Analysis I (oder mit 31.4 c) läßt sich die Ungleichung

$$|\|a\|-\|b\|| \le \|a-b\|$$

für $a,b\in E$ zeigen, und es folgt unmittelbar:

$$|\|x_j\|-\|x\|| \le \|x_j-x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \|x_j\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|$$

ii) Zweimaliges Anwenden der Dreiecksungleichung liefert

$$\begin{aligned}\|\alpha_j x_j + y_j - (\alpha x + y)\| &\leq \|\alpha_j x_j - \alpha x\| + \|y_j - y\| \\ &\leq \|\alpha_j x_j - \alpha_j x\| + \|\alpha_j x - \alpha x\| + \|y_j - y\| \\ &= \underbrace{|\alpha_j|}_{\to|\alpha|} \cdot \underbrace{\|x_j - x\|}_{\to 0} + \underbrace{|\alpha_j - \alpha|}_{\to 0} \cdot \|x\| + \underbrace{\|y_j - y\|}_{\to 0} \quad \longrightarrow \quad 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, und es folgt die Behauptung.

b) Anwenden der Dreiecksungleichung und der Schwarzschen Ungleichung (Satz 31.12) liefert

$$\begin{aligned}|\langle x_j, y_j\rangle - \langle x, y\rangle| &\leq |\langle x_j, y_j\rangle - \langle x, y_j\rangle| + |\langle x, y_j\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x_j - x, y_j\rangle| + |\langle x, y_j - y\rangle| \\ &\leq \underbrace{\|x_j - x\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|y_j\|}_{\to\|y\|} + \|x\| \cdot \underbrace{\|y_j - y\|}_{\to 0} \quad \longrightarrow \quad 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, und es folgt die Behauptung.

32 a) Für beliebige $x, y, z \in X$ gilt:

$d^*(x,y) \geq 0$, d.h. $d^* : X \times X \to [0, \infty)$ wohldefiniert

(M_1) $$d^*(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

(M_2) $$d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1 + d(y,x)} = d^*(y,x)$$

(M_3) $$\begin{aligned}d^*(x,z) + d^*(z,y) &= \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y)} \\ &\geq \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y) + d(x,z)} \\ &= \frac{1 + d(x,z) + d(z,y) - 1}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \\ &\geq 1 - \frac{1}{1 + d(x,y)} \\ &= \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \\ &= d^*(x,y)\end{aligned}$$

(Alternativ läßt sich die Ungleichung

$$\frac{d(x,z) + d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \geq \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

auch aus der Monotonie der reellen Funktion $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ folgern.)

b) Seien $x, y \in X$. Im Falle $x = y$ ist die Äquivalenzbedingung für d und d^* natürlich immer erfüllt. Für $x \neq y$ gilt:

$$
\begin{aligned}
C \cdot d(x,y) \ &\leq \ \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \ \leq \ D \cdot d(x,y) \\
\Leftrightarrow \quad C \ &\leq \ \frac{1}{1 + d(x,y)} \ \leq \ D \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{C} - 1 \ &\geq \ d(x,y) \ \geq \ \frac{1}{D} - 1
\end{aligned}
$$

Falls d beschränkt ist, d.h. falls ein $B > 0$ mit $d(x,y) \leq B$ für alle $x, y \in X$ existiert, wähle $C := \frac{1}{B+1} > 0$ und $D := 1 > 0$. Dann ist die Bedingung erfüllt, und somit sind die beiden Metriken äquivalent.

Falls d unbeschränkt ist, sind d und d^* nicht äquivalent, denn andernfalls entstünde der Widerspruch

$$
C \cdot d(x,y) \ \leq \ \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \ < \ 1 \quad \Rightarrow \quad d(x,y) \ < \ \frac{1}{C}
$$

für alle $x, y \in X$.

sawo