# Musterlösung zu Blatt 9

## Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

**33 a)** $f$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, da Zusammensetzung stetiger Funktionen. $f$ ist nicht stetig in $(0,0)$, da zum Beispiel $\left(\frac{1}{n},0\right) \to (0,0)$, aber $f\left(\frac{1}{n},0\right) = 1 \not\to 0$ (d.h. $f$ ist im Nullpunkt nicht einmal partiell stetig).

**b)** $g$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, da Zusammensetzung stetiger Funktionen. $g$ ist auch stetig in $(0,0)$, denn konvergiert $(x_n, y_n) \to (0,0)$, so gilt

$$|g(x_n,y_n)| \;=\; |x_n| \cdot \underbrace{|f(x_n,y_n)|}_{\le 1} \;\le\; |x_n| \;\to\; 0\,,$$

d.h. $g(x_n,y_n) \to 0 = g(0,0)$.

**c)** Die Funktion

$$\operatorname{sign}(x) \;=\; \begin{cases} \;\;1 & \text{für } x \ge 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Somit ist auch $h$ stetig auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, da Zusammensetzung stetiger Funktionen. $h$ ist ebenfalls stetig in den Punkten $(x,-x)$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $2x^2 = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ (bzw. $k \in \mathbb{N}_0$, da $2x^2 \ge 0$), denn konvergiert $(x_n,y_n) \to (x,-x)$ für solche $x$, so gilt

$$|h(x_n,y_n)| \;=\; |\sin(x_n^2+y_n^2)| \;\to\; |\sin(2x^2)| \;=\; 0\,,$$

d.h. $h(x_n,y_n) \to 0 = h(x,-x)$. Ist dagegen $x \in \mathbb{R}$ mit $2x^2 \ne k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so gilt zum Beispiel $\left(x-\frac{1}{n}, -x-\frac{1}{n}\right) \to (x,-x)$, aber

$$\begin{aligned} h\left(x-\tfrac{1}{n}, -x-\tfrac{1}{n}\right) \;&=\; \operatorname{sign}\left(-\tfrac{2}{n}\right)\cdot \sin\left(\left(x-\tfrac{1}{n}\right)^2 + \left(-x-\tfrac{1}{n}\right)^2\right) \\ &=\; -\sin\left(\left(x-\tfrac{1}{n}\right)^2 + \left(-x-\tfrac{1}{n}\right)^2\right) \\ &\to\; -\sin(2x^2) \;\ne\; \sin(2x^2) \;=\; h(x,-x). \end{aligned}$$

**34** $f$ ist auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ stetig, da Zusammensetzung stetiger Funktionen, insbesondere also partiell stetig auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. $f$ ist auch im Nullpunkt partiell stetig, denn es gilt $f(0,y) = 0 \to 0$ für $y \to 0$ und $f(x,0) = 0 \to 0$ für $x \to 0$.

$f$ ist nicht nur auf den beiden Koordinatenachsen stetig, sondern auch auf jeder anderen Geraden durch den Nullpunkt, denn für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \ne 0$ gilt

$$f(x,\alpha x) \;=\; \frac{\alpha^2 x^3}{x^2+\alpha^4 x^4} \;=\; \frac{\alpha^2 x}{1+\alpha^4 x^2} \;\;\longrightarrow\;\; 0 \;=\; f(0,0)$$

für $x \to 0$.

$f$ ist im Nullpunkt nicht stetig, denn es gilt zum Beispiel $(x_n,y_n) := \left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ für $n \to \infty$, aber:

$$f(x_n,y_n) \;=\; \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} \;=\; \frac{1}{2} \;\;\longrightarrow\;\; \frac{1}{2} \;\ne\; 0 \;=\; f(0,0)$$

**35** Definiere $f(x,y) := 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ und $y > 0$ und $f(x,y) := x + y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y < 0$. Dann ist $f$ in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ stetig, denn ist $(x_n, y_n) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige Folge mit $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ für $n \to \infty$, so gilt:

**1. Fall:** $x_0 y_0 \neq 0$

Sei zum Beispiel $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n > 0$ und $y_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit folgt $f(x_n, y_n) = x_n \to x_0 = f(x_0, y_0)$ und somit die Stetigkeit der Funktion in $(x_0, y_0)$. Für die Fälle $x_0 > 0$ und $y_0 < 0$ bzw. $x_0 < 0$ und $y_0 > 0$ bzw. $x_0 < 0$ und $y_0 < 0$ läßt sich entsprechend argumentieren.

**2. Fall:** $x_0 \neq 0$ und $y_0 = 0$ oder umgekehrt

Sei zum Beispiel $x_0 > 0$ und $y_0 = 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit folgt

$$f(x_n, y_n) \;=\; \left\{ \begin{array}{cl} x_n & \text{falls } y_n \geq 0 \\ x_n + y_n & \text{falls } y_n < 0 \end{array} \right\} \;\longrightarrow\; x_0 \;=\; f(x_0, y_0)$$

und somit die Stetigkeit der Funktion in $(x_0, y_0)$. Für die Fälle $x_0 < 0$ und $y_0 = 0$ bzw. $x_0 = 0$ und $y_0 > 0$ bzw. $x_0 = 0$ und $y_0 < 0$ läßt sich entsprechend argumentieren.

**3. Fall:** $x_0 = y_0 = 0$

Dann folgt

$$f(x_n, y_n) \;=\; \left\{ \begin{array}{cl} x_n & \text{falls } x_n \geq 0 \text{ und } y_n \geq 0 \\ x_n + y_n & \text{falls } x_n \geq 0 \text{ und } y_n < 0 \\ 0 & \text{falls } x_n < 0 \text{ und } y_n \geq 0 \\ y_n & \text{falls } x_n < 0 \text{ und } y_n < 0 \end{array} \right\} \;\longrightarrow\; 0 \;=\; f(x_0, y_0)$$

und somit die Stetigkeit der Funktion in $(x_0, y_0)$.

**36** $\widetilde{\Delta} f$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, da Zusammensetzung stetiger Funktionen, denn $f$ ist stetig. $\widetilde{\Delta} f$ ist ebenfalls stetig in den Punkten $(x,x)$, denn konvergiert $(x_n, y_n) \to (x,x)$, so existiert für jedes $(x_n, y_n)$ mit $y_n \neq x_n$ nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_n \in /x_n, y_n/$ mit

$$\widetilde{\Delta} f(x_n, y_n) \;=\; \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \;=\; f'(\xi_n)\,.$$

Falls $y_n \neq x_n$ für unendlich viele Indizes $n$ gilt, so folgt $\xi_n \to x$ und damit

$$f'(\xi_n) \;\longrightarrow\; f'(x) \;=\; \widetilde{\Delta} f(x,x)\,,$$

da $f'$ stetig ist. Andernfalls gilt $\widetilde{\Delta} f(x_n, y_n) = f'(x_n) \to f'(x)$, in jedem Fall also $\widetilde{\Delta} f(x_n, y_n) \to \widetilde{\Delta} f(x,x)$.

sawo