Musterlösung zu Blatt 10

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

37 a) i) Es gilt $\overline{M} = M$, denn:

1. Möglichkeit:

Es ist $\overline{M} \supseteq M$ nach Definition. Für die umgekehrte Inklusion betrachte einen beliebigen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 > 1$ und $xy \neq 0$ (d.h. $x \neq 0$ und $y \neq 0$). Wähle $r := \min\{\sqrt{x^2 + y^2} - 1, |x|, |y|\}$. Dann ist $r > 0$, und es gilt $K_r((x, y)) \cap M = \emptyset$, d.h. es ist $(x, y) \notin \overline{M}$.

2. Möglichkeit:

Es ist $\overline{M} \supseteq M$ nach Definition. Für die umgekehrte Inklusion betrachte einen beliebigen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 > 1$ und $xy \neq 0$ (d.h. $x \neq 0$ und $y \neq 0$) und eine beliebige Folge (x_n, y_n) in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $x_n^2 + y_n^2 > 1$, $|x_n| \neq 0$ und $|y_n| \neq 0$. Also gibt es keine Folge $(x_n, y_n) \subseteq M$ mit $(x_n, y_n) \to (x, y)$, d.h. es ist $(x, y) \notin \overline{M}$

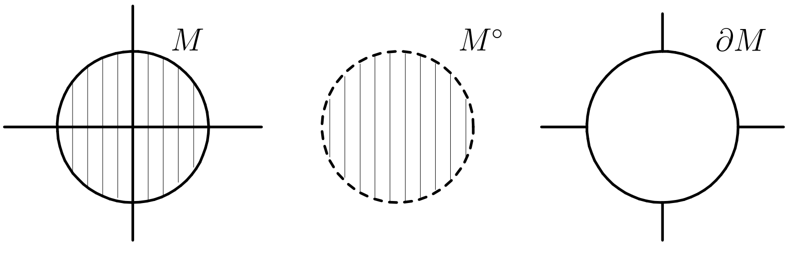
3. Möglichkeit:

$M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} = \overline{K}_1((0, 0))$ ist abgeschlossen (Beispiele und Bemerkungen 33.7), und ebenso ist $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ abgeschlossen, da Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto xy$ (Satz 33.16). Somit ist auch die endliche Vereinigung $M = M_1 \cup M_2$ abgeschlossen (Feststellung 33.9).

ii) Es gilt $M^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\} = K_1((0, 0))$, denn es gilt „$\supseteq$“, da $K_1((0, 0))$ offen ist (Beispiele und Bemerkungen 33.7), und es gilt „$\subseteq$“, da für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2 = 1$ oder mit $x^2+y^2 > 1$ und $xy = 0$ der Kreis $K_r((x, y))$ für jedes $r > 0$ Punkte enthält, die nicht in M liegen.

iii) Mit i) und ii) folgt:

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \wedge x^2+y^2 \geq 1\}$$



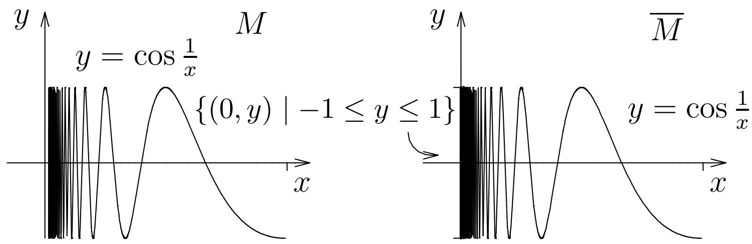
Andere Möglichkeit:

Bestimme zunächst ∂M als Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, so dass für alle $r > 0$ gilt: $K_r((x, y)) \cap M \neq \emptyset$ und $K_r((x, y)) \cap M^c \neq \emptyset$ (Dazu muss nicht nur gezeigt werden, welche Punkte diese Eigenschaft haben, sondern natürlich auch wieder überprüft werden, welche Punkte diese Eigenschaft nicht haben.) Dann ist $\overline{M} = M \cup \partial M$ und $M^\circ = M \cap \partial M$.

b) Ähnlich wie in Teil a) läßt sich zeigen:

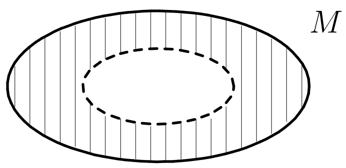
$$\begin{aligned}
\overline{M} &= M \cup \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\} \\
M^\circ &= \emptyset \\
\partial M &= M \cup \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\}
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $\overline{M}$ lassen sich die Folgen $\left(x_n, \cos\frac{1}{x_n}\right)$ mit $x_n := \frac{1}{x_0+2n\pi}$ und $x_0 \in [0,\pi]$ verwenden. Es gilt nämlich $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $\cos\frac{1}{x_n} = \cos x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und da $\cos x_0$ für die betrachteten x_0 alle Werte zwischen -1 und 1 annimmt, folgt $\{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\} \subseteq \overline{M}$.



c) Ähnlich wie in Teil a) läßt sich zeigen:

$$\begin{aligned}
\overline{M} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le \tfrac{x^2}{4} + y^2 \le 4\} \\
M^\circ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \tfrac{x^2}{4} + y^2 < 4\} \\
\partial M &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x^2}{4} + y^2 = 4\}
\end{aligned}$$



d) Es ist $\overline{M} = \mathbb{R}^2$, denn ist $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig, so enthält jede Kugel $K_r((x,y))$ mit $r > 0$ Punkte mit rationalen Koordinaten, d.h. $K_r((x,y)) \cap \mathbb{Q}^2 \ne \emptyset$. Entsprechend ist $M^\circ = \emptyset$, denn ist $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ beliebig, so enthält jede Kugel $K_r((x,y))$ mit $r > 0$ Punkte mit irrationalen Koordinaten, d.h. $K_r((x,y)) \not\subseteq \mathbb{Q}^2$. Es ergibt sich, dass $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ = \mathbb{R}^2$ ist.

38 i) Es sei I eine beliebige Indexmenge und A_i abgeschlossen für alle $i \in I$.

Behauptung: $A := \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ abgeschlossen

Beweis:

Ist $(a_n) \subseteq A$ eine Folge mit $a_n \to a$, so ist $(a_n) \subseteq A_i$ und somit $a \in \overline{A_i} = A_i$ für alle $i \in I$, d.h. es ist $a \in A$. Also gilt $\overline{A} = A$.

ii) Es sei $E := \{1, \ldots, r\}$ eine endliche Indexmenge und A_i abgeschlossen für alle $i \in E$.

Behauptung: $A := \bigcup\limits_{i \in E} A_i$ abgeschlossen

Beweis:

Ist $(a_n) \subseteq A$ eine Folge mit $a_n \to a$, so liegen unendlich viele Folgeglieder in A_j für ein $j \in E$, da E endlich ist, und es folgt $a \in \overline{A_j} = A_j \subseteq A$. Also gilt $\overline{A} = A$.

39 a) Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $0 < f(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und mit Hilfe des Zwischenwertsatzes läßt sich zeigen, dass f alle Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Damit folgt:

$$f(\overline{\mathbb{R}}) \;=\; f(\mathbb{R}) \;=\; (0,1] \;\neq\; [0,1] \;=\; \overline{f(\mathbb{R})}$$

b) Es gilt beides nicht, ein Gegenbeispiel ist durch die Funktion aus Teil a) gegeben.

40 Behauptung: f gleichmäßig stetig

$$\Leftrightarrow \; (\,\forall\,(x_n),(y_n) \subseteq X\colon\; d(x_n,y_n) \to 0 \;\Rightarrow\; d(f(x_n),f(y_n)) \to 0\,)$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“:

Sind $(x_n),(y_n) \subseteq X$ mit $d(x_n,y_n) \to 0$ gegeben, so existiert wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f für alle $n \in \mathbb{N}$ zu $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$ ein $\delta_n > 0$, so dass für alle $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta_n$ gilt: $d(f(x),f(y)) < \frac{1}{n}$. Da $d(x_n,y_n) \to 0$ gilt, existiert ein $N_n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq N_n$ gilt: $d(x_m,y_m) < \delta_n$ und somit $d(f(x_m),f(y_m)) < \frac{1}{n}$. Daraus folgt $d(f(x_m),f(y_m)) \to 0$.

„$\Leftarrow$“:

Annahme: f nicht gleichmäßig stetig

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ Punkte $x, y \in X$ existieren, für die $d(x,y) < \delta$ und $d(f(x),f(y)) \geq \varepsilon$ gilt. Insbesondere existieren zu $\delta_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in X$ mit $d(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$ und $d(f(x_n),f(y_n)) \geq \varepsilon$, d.h. $(x_n),(y_n) \subseteq X$ sind Folgen mit $d(x_n,y_n) \to 0$ und $d(f(x_n),f(y_n)) \geq \varepsilon > 0$. **Widerspruch!** (zur Voraussetzung)

Also ist f gleichmäßig stetig.

sawo