Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

11. Übungsblatt zu „Analysis II für Lehramt Gymnasium“
Sommersemester 2007

Abgabetermin: Donnerstag, 21.6.07, bis 10.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 41: Es seien X ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ kompakt. Zeigen Sie, dass gilt:

a) $A \cap B$ ist kompakt.

b) $A \cup B$ ist kompakt.

Aufgabe 42: Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum X genau dann kompakt ist, wenn jede unendliche Menge $M \subseteq X$ einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 43: Es sei X ein metrischer Raum. Die *Distanz* zweier Mengen $A, B \subseteq X$ wird erklärt durch:

$$d(A,B) \ := \ \inf\{d(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

a) Es seien A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $d(A,B) > 0$ gilt.

b) Finden Sie abgeschlossene, disjunkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $d(A,B) = 0$.

Aufgabe 44: Es sei E ein normierter Raum und $C \subseteq E$ konvex. Zeigen Sie, dass gilt:

a) $\overline{C} \subseteq E$ ist konvex.

b) Sind $x_1, \ldots, x_r \in C$ und $t_1, \ldots, t_r \in [0,1]$ mit $\sum\limits_{k=1}^{r} t_k = 1$, so ist $\sum\limits_{k=1}^{r} t_k x_k \in C$.