Musterlösung zu Blatt 11

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

41 a) $A \cap B$ ist kompakt, denn:

1. Möglichkeit:

Ist $(x_n) \subseteq A \cap B$ eine beliebige Folge, so gilt insbesondere $(x_n) \subseteq A$, und nach Voraussetzung gibt es eine konvergente Teilfolge von (x_n) in A. Die Teilfolge liegt natürlich auch in B, und da B als kompakter Raum vollständig ist (Feststellung 35.3), konvergiert die Teilfolge in B, insgesamt also in $A \cap B$.

2. Möglichkeit:

Da A und B kompakt sind, sind sie als Teilmengen von X abgeschlossen (Feststellung 35.3). Somit ist auch $A \cap B$ abgeschlossen in dem kompakten Raum A und daher nach Feststellung 35.3 ebenfalls kompakt.

b) $A \cup B$ ist kompakt, denn ist $(x_n) \subseteq A \cup B$ eine beliebige Folge, so gibt es eine Teilfolge von (x_n), die ganz in A oder ganz in B liegt, und diese besitzt nach Voraussetzung eine konvergente Teilfolge in A bzw. B. Also existiert eine Teilfolge von (x_n) in $A \cup B$, die konvergiert.

42 Behauptung: X kompakt $\Leftrightarrow \forall\, M \subseteq X$ unendlich: M hat einen Häufungspunkt

Beweis:

„$\Rightarrow$“:

Ist $M \subseteq X$ unendlich, so existiert eine Folge $(x_n) \subseteq M$ mit $x_n \neq x_m$ für $n \neq m$. Wegen der Kompaktheit von X besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_j}), d.h. es existiert ein $x \in X$ mit $x_{n_j} \to x$. x ist Häufungspunkt von M, denn nach Voraussetzung gilt $x_n = x$ höchstens für ein $n \in \mathbb{N}$ und somit kann $(x_{n_j}) \subseteq M \setminus \{x\}$ gewählt werden.

„$\Leftarrow$“:

Es sei $(x_n) \subseteq X$ eine beliebige Folge und $M := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ist M endlich, so hat (x_n) eine konstante Teilfolge. Andernfalls hat M nach Voraussetzung einen Häufungspunkt $x \in X$. Daher existiert zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $n_j \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n_j}, x) < \frac{1}{j}$ und es kann $n_j > n_{j-1}$ gewählt werden (andernfalls gäbe es einen Widerspruch dazu, dass x Häufungspunkt von M ist). Dies liefert eine Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n) mit $x_{n_j} \to x$. Also besitzt jede Folge in X eine konvergente Teilfolge, d.h. X ist kompakt.

43 a) Annahme: $\boldsymbol{d(A,B) = 0}$

Dann existieren Folgen $(a_n) \subseteq A$ und $(b_n) \subseteq B$ mit $d(a_n, b_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Da B kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(b_{n_j}) \subseteq B$ mit $b_{n_j} \to b \in B$ für $j \to \infty$. Die Dreiecksungleichung liefert

$$0 \;\leq\; d(a_{n_j}, b) \;\leq\; \underbrace{d(a_{n_j}, b_{n_j})}_{\to 0} + \underbrace{d(b_{n_j}, b)}_{\to 0} \;\longrightarrow\; 0$$

für $j \to \infty$, d.h. $a_{n_j} \to b$. Nach 33.6 ist $b \in \overline{A} = A$ und somit $b \in A \cap B = \emptyset$. **Widerspruch!**

Also ist $d(A,B) > 0$.

b) Betrachte die beiden folgenden Teilmengen:

$$A \;:=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \quad \text{und} \quad B \;:=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

A und B sind offensichtlich disjunkt und beide abgeschlossen, da Urbilder der abgeschlossenen Mengen $\{0\}$ bzw. $\{1\}$ unter der stetigen Abbildung $(x,y) \mapsto xy$ (Satz 33.16). Es gilt $d(A,B) = 0$, da zum Beispiel $a_n := (n,0) \in A$ und $b_n := \left(n, \frac{1}{n}\right) \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq d(A,B) \leq d(a_n, b_n) = \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

44 a) Seien $x, y \in \overline{C}$.

zu zeigen: $[x,y] = \{x + t(y-x) \mid t \in [0,1]\} \;\subseteq\; \overline{C}$

Sei $t \in [0,1]$. Nach 33.6 existieren Folgen $(x_n), (y_n) \subseteq C$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y$ für $n \to \infty$. Da C konvex ist, ist $x_n + t(y_n - x_n) \in C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit

$$x_n + t(y_n - x_n) \;\longrightarrow\; x + t(y-x)$$

für $n \to \infty$ folgt $x + t(y-x) \in \overline{C}$.

b) Zeige die Behauptung mittels vollständiger Induktion nach $r \in \mathbb{N}$. Für $r = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $r \geq 2$ und die Behauptung für $r-1$ bewiesen. Ist $t_j = 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. Seien also im Folgenden $t_1, \ldots, t_r > 0$. Definiere

$$t \;:=\; \sum_{k=1}^{r-1} t_k \;\in [0,1]\,.$$

Dann ist

$$\sum_{k=1}^{r-1} \frac{t_k}{t} \;=\; \frac{1}{t} \cdot \sum_{k=1}^{r-1} t_k \;=\; 1$$

und somit

$$x \;:=\; \sum_{k=1}^{r-1} \frac{t_k}{t} x_k \;\in C$$

nach Induktionsvoraussetzung. Schließlich folgt

$$\sum_{k=1}^{r} t_k x_k \;=\; tx + t_r x_r \;=\; tx + (1-t)x_r \;=\; x_r + t(x - x_r) \;\in C\,,$$

da C konvex ist.

sawo