Musterlösung zu Blatt 12

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

45 a) Bezeichnet $\gamma_A : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ den in Polarkoordinaten angegebenen Weg der Archimedischen Spirale, so berechnet sich die Weglänge nach 36.13 wie folgt.

$$L(\gamma_A) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi$$

Mit Aufgabe 7 folgt:

$$\begin{aligned} L(\gamma_A) &= \frac{a}{2} \left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \log\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right) \right]_0^{2\pi} \\ &= a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2} \log\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right) \\ &\approx 21{,}256 \cdot a \end{aligned}$$

b) Bezeichnet $\gamma_K : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ den in Polarkoordinaten angegebenen Weg der Kardioide, so berechnet sich die Weglänge nach 36.13 wie folgt.

$$\begin{aligned} L(\gamma_K) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi \end{aligned}$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, dieses Integral zu berechnen.

1. Möglichkeit:

Verwende eine geeignete trigonometrische Formel, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} L(\gamma_K) &= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}\, d\varphi \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi \qquad \text{(trigonometrische Formel)} \\ &= 2a \left(\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi \right) \\ &= 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} - 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= 8a \end{aligned}$$

2. Möglichkeit:

Substituiere $t := \cos\varphi$. Dabei ist zu beachten, dass der Kosinus nur auf den Teilintervallen $[0,\pi]$ und $[\pi, 2\pi]$ injektiv ist. Mit

$$\frac{dt}{d\varphi} \;=\; -\sin\varphi \;=\; \begin{cases} -\sqrt{1-\cos^2\varphi} & \text{für } \varphi\in[0,\pi] \\ +\sqrt{1-\cos^2\varphi} & \text{für } \varphi\in[\pi,2\pi] \end{cases}$$

folgt:

$$\begin{aligned} L(\gamma_K) &= \sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi \\ &= \sqrt{2}a\left(\int_1^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt + \int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right) \\ &= 2\sqrt{2}a\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{(1+t)(1-t)}}\,dt \\ &= 2\sqrt{2}a\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt \\ &= 2\sqrt{2}a\left[-2\sqrt{1-t}\right]_{-1}^{1} \\ &= 8a \end{aligned}$$

46 i) Es gilt:

$$\sin z \;=\; \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$$

Damit folgt für $z\in\mathbb{C}$

$$\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} = e^{-iz} \;\Leftrightarrow\; e^{2iz} = 1 = e^0 \;\Leftrightarrow\; 2z - 0 \in \{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

nach Satz 37.9. Also ist $z = k\pi$ für ein $k\in\mathbb{Z}$, insbesondere $z\in\mathbb{R}$.

ii) Es gilt:

$$\cos z \;=\; \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$$

Damit folgt für $z\in\mathbb{C}$

$$\cos z = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} = -e^{-iz} \;\Leftrightarrow\; e^{2iz} = -1 = e^{i\pi} \;\Leftrightarrow\; 2z - \pi \in \{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

nach Satz 37.9. Also ist $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k\in\mathbb{Z}$, insbesondere $z\in\mathbb{R}$.

47 Nach 37.13 ist der Hauptwert der Potenz a^b gegeben durch

$$a^b \;=\; e^{b\,\mathrm{Log}\ a} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Log}\ a \;=\; \log|a| + i\,\mathrm{Arg}\ a \quad \text{und} \quad \mathrm{Arg}\ a\in(-\pi,\pi]$$

und die Nebenwerte durch:

$$a^b \;=\; e^{b(\mathrm{Log}\ a + 2k\pi i)}$$

a) Hauptwert: e^i
Nebenwerte: $e^{i-2k\pi} = e^{-2k\pi}\cdot e^i$ mit $k\in\mathbb{Z}$

b) Hauptwert: $2^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi^2}{4}}$
Nebenwerte: $2^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi^2}{4}+2k\pi^2 i} = 2^{\frac{\pi}{2}} e^{i\left(\frac{1}{4}+2k\right)\pi^2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

c) Hauptwert: $2e^{\frac{\pi}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\log 2\right)}$,
Nebenwerte: $2e^{\frac{\pi}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\log 2\right)+2k\pi(i+1)} = 2e^{\frac{\pi}{6}+2k\pi} e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\log 2+2k\pi\right)}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

48 Für die partiellen Ableitungen erster Ordnung gilt:

$$\partial_x f(x,y,z) = \sin(yz^2) \quad \partial_y f(x,y,z) = xz^2\cos(yz^2) \quad \partial_z f(x,y,z) = 2xyz\cos(yz^2)$$

Daraus ergeben sich die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{array}{lll}
\partial_{xx} f(x,y,z) = 0 & \partial_{xy} f(x,y,z) = z^2\cos(yz^2) & \partial_{xz} f(x,y,z) = 2yz\cos(yz^2) \\
\partial_{yx} f = \partial_{xy} f & \partial_{yy} f(x,y,z) = -xz^4\sin(yz^2) & \partial_{yz} f(x,y,z) = 2xz(\cos(yz^2) - yz^2\sin(yz^2)) \\
\partial_{zx} f = \partial_{xz} f & \partial_{zy} f = \partial_{yz} f & \partial_{zz} f(x,y,z) = 2xy(\cos(yz^2) - 2yz^2\sin(yz^2))
\end{array}$$

sawo