Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

13. Übungsblatt zu „Analysis II für Lehramt Gymnasium“ Sommersemester 2007

Abgabetermin: Donnerstag, 5.7.07, bis 10.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 49: Berechnen Sie $F(x) := \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\log t}\, dt$ für $x \geq 0$.

Aufgabe 50: Im Folgenden werden Punkte aus $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}$ mit (x, t) bezeichnet, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$, und es sei $r = |x|$. Definiere:

$$W : (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad W(x,t) := \frac{\cos(r - ct)}{r}$$

Zeigen Sie, dass

$$\Delta_x W - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \qquad \left(\text{mit } \Delta_x = \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}^2\right)$$

gilt, d.h. W ist eine bezüglich der Raumvariablen rotationssymmetrische Lösung der *Schwingungs-* oder *Wellengleichung* $\Delta_x f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ ($c > 0$ ist die Wellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit).

Hinweis: Verwenden Sie die Formel für $\Delta(f \circ r)$ aus Beispiel 38.13 der Vorlesung.

Aufgabe 51: Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ total differenzierbar. Zeigen Sie, dass auch $f + g$ und $f \cdot g$ in a total differenzierbar sind. Wie lautet die Produktregel?

Aufgabe 52: Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(D \times (a,b))$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ mit $a < \varphi(x) \leq \psi(x) < b$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie für die Funktion

$$F : D \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy$$

mit Hilfe der Kettenregel, dass gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\, dy + f(x, \psi(x)) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) - f(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)$$