Musterlösung zu Blatt 13

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

49 Es ist offensichtlich $F(0) = 0$. Sei von nun an $x > 0$. Die Abbildung

$$f_x : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_x(t) \;:=\; \frac{t^x - 1}{\log t} \;=\; \frac{e^{x \log t} - 1}{\log t}$$

wird durch

$$f(0) \;:=\; \lim_{t \to 0^+} \frac{t^x - 1}{\log t} \;=\; 0 \quad \text{und} \quad f(1) \;:=\; \lim_{t \to 1^-} \frac{t^x - 1}{\log t} \;\overset{(de\,l'H.)}{=}\; \lim_{t \to 1^-} \frac{x t^{x-1}}{\frac{1}{t}} \;=\; x$$

zu einer stetigen Abbildung. f_x ist partielle Funktion der entsprechend definierten Funktion $f : (0, \infty) \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Es ist

$$\partial_x f(x,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial x} \frac{t^x - 1}{\log t} \;=\; \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{x \log t} - 1}{\log t} \;=\; \frac{\log t \cdot e^{x \log t}}{\log t} \;=\; t^x\,.$$

Da $\partial_x f$ auf $(0, \infty) \times [0,1]$ stetig ist gilt nach Theorem 38.10:

$$F'(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\log t}\, dt \;=\; \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{t^x - 1}{\log t}\, dt \;=\; \int_0^1 t^x\, dt \;=\; \left. \frac{t^{x+1}}{x+1} \right|_0^1 \;=\; \frac{1}{x+1}$$

Also ist $F(x) = \log(x+1) + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Wegen $F(0) = 0$ ist $C = 0$ (da F in 0 stetig ist) und somit $F(x) = \log(x+1)$.

50 Es ist $W = S \circ r$ mit $S : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$S(u,t) \;:=\; \frac{\cos(u - ct)}{u}$$

Nach Beispiel 38.13 der Vorlesung gilt:

$$\Delta_x (S \circ r) \;=\; S''(r) + \frac{2}{r} S'(r)\,, \text{ wobei } S' \;=\; \frac{\partial S}{\partial u}$$

Mit

$$S'(u,t) \;=\; \frac{-u \sin(u - ct) - \cos(u - ct)}{u^2} \;=\; -\frac{\sin(u - ct)}{u} - \frac{\cos(u - ct)}{u^2}$$

und

$$S''(u,t) \;=\; -\frac{\cos(u - ct)}{u} + \frac{2 \sin(u - ct)}{u^2} + \frac{2 \cos(u - ct)}{u^3}$$

ergibt sich durch Einsetzen:

$$\Delta_x W \;=\; -\frac{\cos(r - ct)}{r}$$

Desweiteren gilt

$$\frac{\partial W}{\partial t} \;=\; \frac{c \sin(r - ct)}{r} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \;=\; -\frac{c^2 \cos(r - ct)}{r}\,,$$

und es folgt unmittelbar:

$$\Delta_x W - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \;=\; 0$$

51 Nach Definition gibt es lineare Abbildungen $f'(a)$ und $g'(a)$, so dass für kleine $|h|$

$$f(a+h) \;=\; f(a)+f'(a)(h)+\rho_f(h) \quad \text{und} \quad g(a+h) \;=\; g(a)+g'(a)(h)+\rho_g(h)$$

mit $\rho_f(h) = o(|h|)$ und $\rho_g(h) = o(|h|)$ ist.

i) Es gilt $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$, denn:

$$\begin{aligned}
(f+g)(a+h) &= f(a+h)+g(a+h) \\
&= f(a)+f'(a)(h)+\rho_f(h)+g(a)+g'(a)(h)+\rho_g(h) \\
&= f(a)+g(a)+f'(a)(h)+g'(a)(h)+\rho_f(h)+\rho_g(h) \\
&= (f+g)(a)+(f'(a)+g'(a))(h)+\rho(h)
\end{aligned}$$

mit $\rho(h) := \rho_f(h)+\rho_g(h)$ und $\rho(h) = o(|h|)$.

ii) Es gilt die Produktregel $(fg)'(a) = f(a)g'(a)+g(a)f'(a)$, denn:

$$\begin{aligned}
(fg)(a+h) &= f(a+h)g(a+h) \\
&= (f(a)+f'(a)(h)+\rho_f(h))(g(a)+g'(a)(h)+\rho_g(h)) \\
&= f(a)g(a)+f(a)g'(a)(h)+f'(a)(h)g(a)+\rho(h) \\
&= (fg)(a)+(f(a)g'(a)+g(a)f'(a))(h)+\rho(h)
\end{aligned}$$

mit $\rho(h) := f'(a)(h)g'(a)(h) + (f(a)+f'(a)(h))\rho_g(h) + \rho_f(h)(g(a)+g'(a)(h)) + \rho_f(h)\rho_g(h)$ und $\rho(h) = o(|h|)$ (Nachprüfen!).

52 Beim Ableiten nach x_j können $x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n$ als fest betrachtet werden. Im Folgenden werden daher die Abbildungen f, F, φ und ψ nur in Abhängigkeit von x_j geschrieben. Wende die Kettenregel auf $F = G\circ H$ mit

$$G(x_j,u,v) \;:=\; \int_u^v f(x_j,y)\,dy \quad \text{und} \quad H(x_j) \;:=\; \begin{pmatrix} x_j \\ \varphi(x_j) \\ \psi(x_j) \end{pmatrix}$$

an. Es gilt:

$$G'(x_j,u,v) \;=\; \left(\int_u^v \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j,y)\,dy, -f(x_j,u), f(x_j,v)\right)$$

und

$$H'(x_j) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_j) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j}(x_j) \end{pmatrix}$$

Mit der Kettenregel $F'(x_j) = G'(H(x_j))\cdot H'(x_j)$ folgt die Behauptung.

sawo