Musterlösung zu Blatt 14

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

53 a) Überprüfe zunächst die notwendige Bedingung $Df(x,y) = 0$ für die Existenz lokaler Extrema. Mit

$$\partial_x f(x,y) \;=\; 6x^2 - 6x \quad \text{und} \quad \partial_y f(x,y) \;=\; 6y^2 + 6y$$

folgt:

$$\begin{aligned} & Df(x,y) = 0 \\ \Leftrightarrow\;& \partial_x f(x,y) = 0 \;\wedge\; \partial_y f(x,y) = 0 \\ \Leftrightarrow\;& 6x(x-1) = 0 \;\wedge\; 6y(y+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\;& (x = 0 \;\vee\; x = 1) \;\wedge\; (y = 0 \;\vee\; y = -1) \\ \Leftrightarrow\;& (x,y) \in \{(0,0), (0,-1), (1,0), (1,-1)\} \end{aligned}$$

Untersuche nun die Hesse-Matrix in den kritischen Stellen. Berechnen der zweiten partiellen Ableitungen liefert:

$$H_f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 12y+6 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der kritischen Stellen ergibt schließlich:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ist indefinit. Also liegt in $(0,0)$ kein lokales Extremum vor.

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

ist negativ definit. Also liegt in $(0,-1)$ ein lokales Maximum mit $f(0,-1) = 1$ vor.

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit. Also liegt in $(1,0)$ ein lokales Minimum mit $f(1,0) = -1$ vor.

$$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

ist indefinit. Also liegt in $(1,-1)$ kein lokales Extremum vor.

b) Überprüfe zunächst die notwendige Bedingung $Df(x,y) = 0$ für die Existenz lokaler Extrema. Mit

$$\partial_x f(x,y) \;=\; 2x(4-4x^2-y^2)e^{-x^2-4y^2} \quad \text{und} \quad \partial_y f(x,y) \;=\; 2y(1-16x^2-4y^2)e^{-x^2-4y^2}$$

folgt:

$$
\begin{aligned}
& Df(x,y) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \partial_x f(x,y) = 0 \ \wedge\ \partial_y f(x,y) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2x(4-4x^2-y^2)e^{-x^2-4y^2} = 0 \ \wedge\ 2y(1-16x^2-4y^2)e^{-x^2-4y^2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x=0 \vee 4-4x^2-y^2=0) \ \wedge\ (y=0 \vee 1-16x^2-4y^2=0) \\
\Leftrightarrow\ & (x=0 \wedge y=0) \ \vee\ (x=0 \wedge 1-4y^2=0) \ \vee\ (y=0 \wedge 4-4x^2=0) \\
& \vee (4-4x^2-y^2=0 \wedge 1-16x^2-4y^2=0) \\
\Leftrightarrow\ & (x=0 \wedge y=0) \ \vee\ (x=0 \wedge y^2=\tfrac{1}{4}) \ \vee\ (y=0 \wedge x^2=1) \\
& \vee \underbrace{(16-16x^2-4y^2=0 \wedge 1-16x^2-4y^2=0)}_{\text{leere Lösungsmenge}} \\
\Leftrightarrow\ & (x,y) \in \{(0,0), \left(0,\pm\tfrac{1}{2}\right), (\pm 1, 0)\}
\end{aligned}
$$

Untersuche nun die Hesse-Matrix in den kritischen Stellen. Berechnen der zweiten partiellen Ableitungen liefert:

$$
H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(8x^4-20x^2+2x^2y^2-y^2+4)e^{-x^2-4y^2} & 4xy(16x^2+4y^2-17)e^{-x^2-4y^2} \\ 4xy(16x^2+4y^2-17)e^{-x^2-4y^2} & 2(32y^4+128x^2y^2-20y^2-16x^2+1)e^{-x^2-4y^2} \end{pmatrix}
$$

Einsetzen der kritischen Stellen ergibt schließlich:

$$
H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

ist positiv definit ist. Also liegt in $(0,0)$ ein lokales Minimum mit $f(0,0)=0$ vor.

$$
H_f\left(0,\pm\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2}e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix}
$$

ist indefinit. Also liegen in $\left(0,\pm\frac{1}{2}\right)$ keine lokalen Extrema vor.

$$
H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -16e^{-1} & 0 \\ 0 & -30e^{-1} \end{pmatrix}
$$

ist negativ definit. Also liegen in $(\pm 1,0)$ lokale Maxima mit $f(\pm 1, 0) = 4e^{-1})$ vor.

54 Es gilt

$$
f(x) = \sum_{k=1}^{r} |x-a_k|^2 = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n} (x_i-(a_k)_i)^2 \geq 0
$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da f nach unten beschränkt ist und $|f(x)| \to \infty$ für $|x| \to \infty$ gilt, existiert das Minimum. Überprüfe die notwendige Bedingung $Df(x) = 0$. Mit

$$
\partial_{x_j} f(x) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_j}(x_i-(a_k)_i)^2 = \sum_{k=1}^{r} 2(x_j-(a_k)_j)
$$

folgt:

$$\partial_{x_j} f(x) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{r} x_j \;=\; \sum_{k=1}^{r}(a_k)_j \quad\Leftrightarrow\quad x_j \;=\; \frac{1}{r}\cdot\sum_{k=1}^{r}(a_k)_j$$

Einzige kritische Stelle ist also der Schwerpunkt

$$x_S \;=\; \frac{1}{r}\cdot\sum_{k=1}^{r} a_k$$

von $a_1, \ldots, a_r$. An dieser Stelle wird das gesuchte Minimum $f(x_S)$ angenommen.

55 Bestimme die lokalen Extrema der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$F(a,b) \;:=\; \sum_{k=1}^{n}(y_k - a x_k - b)^2\,.$$

Überprüfe dazu die notwendige Bedingung $DF(x,y) = 0$. Mit

$$\partial_a F(a,b) \;=\; -2\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - a x_k - b) \quad\text{und}\quad \partial_b F(a,b) \;=\; -2\sum_{k=1}^{n}(y_k - a x_k - b)$$

folgt:

$$\begin{aligned} & Df(x,y) = 0 \\ \Leftrightarrow\; & \partial_a F(a,b) = 0 \;\wedge\; \partial_b F(a,b) = 0 \\ \Leftrightarrow\; & a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \;\wedge\; a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\cdot n = \sum_{k=1}^{n} y_k \end{aligned}$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach b liefert:

$$b \;=\; \frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k - a\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt:

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\left(\sum_{k=1}^{n} y_k - a\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu:

$$a\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\sum_{k=1}^{n} y_k$$

Desweiteren gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 \;=\; \ldots \;=\; x_n\,,$$

was sich durch Ausmultiplizieren in der Gleichung

$$n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \;=\; \sum_{1\le j<k\le n}(x_k - x_j)^2$$

zeigen läßt.

1. Fall: $\exists\, i,j \in \{1,\dots n\}\colon\ i \neq j \ \wedge\ x_i \neq x_j$

Dann liefert Auflösen der letzten Gleichung nach a:

$$a \;=\; \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \sum\limits_{k=1}^{n} y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}$$

Als Wert für b ergibt sich dann:

$$b \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \sum\limits_{k=1}^{n} y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}$$

Da F nach unten (durch 0) beschränkt ist und $|F(a,b)| \to \infty$ für $|(a,b)| \to \infty$ gilt, nimmt F ein Minimum an und zwar in der oben berechneten einzigen kritischen Stelle (a,b).

2. Fall: $x_1 = \ldots = x_n =: x$

Dann ist die letzte Gleichung stets erfüllt, und a kann beliebig gewählt werden. Dies ergibt unendlich viele kritische Stellen (a,b) mit (offensichtlich minimalem) Funktionswert $F(a,b) = 0$, nämlich solche mit $b = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} y_k - ax$ und a beliebig.

sawo