Musterlösung zum Ferienblatt

Analysis I für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

53 a) Nach Satz 20.3 ist die Bogenlänge einer auf $[a, b]$ stetig differenzierbaren Funktion f gegeben durch

$$L_a^b(f) \;=\; \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

hier also:

$$\begin{aligned}
L_0^1(f) &= \textstyle\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx \qquad (\text{da } f'(x)=\tfrac{3}{2}\sqrt{x})\\
&= \textstyle\int_1^{13/4} \frac{4}{9}\sqrt{t}\,dt \qquad (\text{mit } t := 1+\tfrac{9}{4}x,\ dt=\tfrac{9}{4}dx)\\
&= \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{2}{3}\,t^{3/2}\Big|_1^{13/4}\\
&= \tfrac{8}{27}\left(\left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2}-1\right)\\
&= \tfrac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)
\end{aligned}$$

b) Wie in Teil a) wird die erste Ableitung von f benötigt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{x(x+2)}+\frac{1}{2}(x+1)\frac{2x+2}{2\sqrt{x(x+2)}}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x(x+2)}+\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x(x+2)}}-\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})\sqrt{x(x+2)}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x(x+2)}+\frac{x^2+2x}{\sqrt{x(x+2)}}\right)\\
&= \sqrt{x(x+2)}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die gesuchte Bogenlänge:

$$\begin{aligned}
L_0^1(f) &= \textstyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2+2x}\,dx &&= \textstyle\int_0^1 \sqrt{(x+1)^2}\,dx\\
&= \textstyle\int_0^1 (x+1)\,dx &&= \tfrac{x^2}{2}+x\Big|_0^1\\
&= \tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

54 Partielle Integration liefert:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \;=\; \underbrace{f(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^{2\pi}}_{=0}-\int_0^{2\pi} f'(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx$$

Es gilt:

$$\left|\int_0^{2\pi} f'(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx\right| \;\le\; \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(x)|\cdot \underbrace{|\sin(nx)|}_{\le 1}\,dx \;\le\; \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(x)|\,dx$$

Daraus folgt

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\right| \;\le\; \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{2\pi} |f'(x)|\,dx}_{<\infty} \;\longrightarrow\; 0$$

für $n \to \infty$.

55 **Zeige:** $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,x_0 > 0\;\forall\,x \ge x_0\colon \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - L\right| \;<\; \varepsilon$

Es gilt:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - L \;=\; \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - \frac{1}{x}\int_0^x L\,dt \;=\; \frac{1}{x}\int_0^x (f(t)-L)\,dt$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $f(t)$ für $t \to \infty$ gegen L konvergiert, existiert ein $x_1 > 0$, so dass

$$|f(t) - L| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $t \ge x_1$ gilt. Desweiteren existiert ein $x_2 > 0$, so dass

$$\frac{1}{x}\int_0^{x_1} |f(t) - L|\,dt \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $x \ge x_2$. Daher gilt für alle $x \ge x_0 := \max\{x_1, x_2\}$

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t)-L)\,dt\right| \;\le\; \frac{1}{x}\int_0^{x_1} |f(t)-L|\,dt + \frac{1}{x}\int_{x_1}^x |f(t)-L|\,dt \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x-x_1}{x}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon$$

und somit auch:

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - L\right| \;<\; \varepsilon$$

Daraus folgt die Behauptung.

Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar, da

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt$$

nicht immer existiert.

56 Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel liefert die durch $f(x) := |x|$ auf einem offenen Intervall um $x_0 := 0$ definierte Betragsfunktion. f ist stetig, aber in x_0 nicht differenzierbar. Dennoch gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{|h| - |-h|}{2h} \;=\; 0$$

sawo