

### 3. Hausaufgabenblatt zu gewöhnliche Differentialgleichungen SS 2007, 23.04.2007

**Aufgabe 6** Es sei  $\dot{x} = f(x)$  ein autonomes System und  $\varphi$  sein Fluß. Unter welchen Voraussetzungen bildet die Menge aller Zeit- $t$ -Abbildungen  $\varphi^t$  bezüglich der Hintereinanderausführung eine (abelsche?) Gruppe?

**Aufgabe 7** Klären Sie die Frage, ob die beiden Funktionen

$$\varphi_1^t(x_0) = x_0 e^t \quad \text{und} \quad \varphi_2^t(x_0) = x_0 e^{t^2}$$

Flüsse von autonomen Systemen sein können.

**Aufgabe 8** Für  $a \in \mathbb{R}$  sei die DGL

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + a(x^2 + y^2)x \\ \dot{y} &= -x + a(x^2 + y^2)y \end{cases}$$

gegeben.

- Transformieren Sie diese DGL in Polarkoordinaten.
- Skizzieren Sie das Phasenportrait in Polar- und kartesischen Koordinaten für die Fälle  $a < 0, a = 0, a > 0$ .

**Aufgabe 9** Es sei die folgende DGL gegeben:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) - y(\sqrt{x^2 + y^2} - x) \\ \dot{y} &= y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) + x(\sqrt{x^2 + y^2} - x) \end{cases}.$$

- Transformieren Sie die DGL in Polarkoordinaten.
- Skizzieren Sie das Phasenportrait in Polarkoordinaten.
- Es sei  $(x(t), y(t))^T \neq (0, 0)^T$  eine Lösung der DGL in kartesischen Koordinaten. Zeigen Sie mit Aufgabenteil a), dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (1, 0)$$

gilt. Was heißt das anschaulich?