Prof. Dr. Karl Friedrich Siburg
Martin Hülsmann

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

4. Hausaufgabenblatt zu gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2007, 30.04.2007

Zum Keplerproblem

Aufgabe 10 Bekanntlich ist das Keplerproblem für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ durch die DGL

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass das Keplerproblem folgende Integrale besitzt (siehe Vorlesung Satz 3.3):

a) $L = x \times \dot{x}$ (Drehimpuls)

b) $C = \dot{x} \times L - \frac{x}{|x|}$ (Lenz-Runge-Vektor).

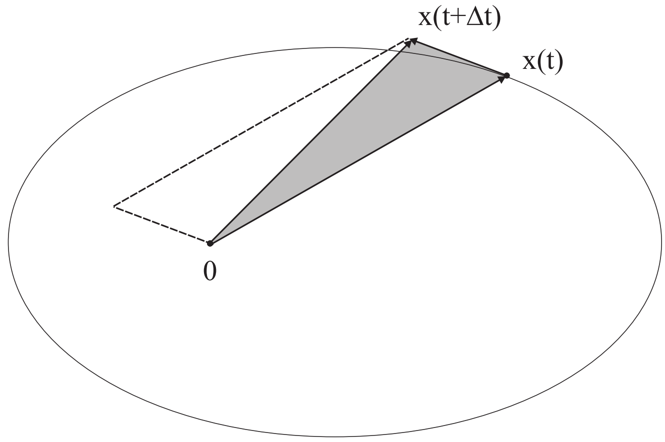
Hinweis: Es gilt $a \times b \times c =< a, c > b- < a, b > c$.

Aufgabe 11 Folgern Sie nun mit Ihrem Wissen über den Drehimpuls, dass (siehe Vorlesung Korollar 3.4)

a) die Bewegungen der Körper im Keplerproblem in einer festen Ebene stattfinden, auf der der Drehimpulsvektor senkrecht steht.

b) für geschlossene Bahnen $r^2\dot{\theta} = const$ gilt. Was heißt das anschaulich?

Aufgabe 12 Leiten Sie daraus das 2. Keplersches Gesetz her:
Der Bahnstrahl einer geschlossenen Bahn überstreicht in gleicher Zeit die gleiche Fläche.
Siehe Skizze:



Bitte Wenden!

Aufgabe 13($\star$) Zu Kegelschnitten.

a) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Formel $r = \dfrac{const}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$ und Kegelschnitten her.

b) Warum haben Kegelschnitte die Form von Kreisen, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln? Sind dies alle geometrischen Möglichkeiten?

c) Geben Sie eine geometrische Definition von Ellipse, Parabel und Hyperbel. (Beispiel Kreis: Ein Kreis sind all die Punkte, die zu einem fest gewählten Mittelpunkt einen festen Abstand (Radius) haben.)

Sie finden Hinweise zu Kegelschnitten beispielsweise in dem Buch von Hilbert und Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie
`Hinweis:` Aufgaben mit Stern sind solche, die zur Erweiterung Ihrer mathematischen Allgemeinbildung führen und einen eher indirekten Bezug zu Differentialgleichungen besitzen.

Abgabe: Dienstag, 8.5.2007, bis 12:00 Uhr, in den Briefkasten Nr. 80 (Gruppe 1 und 3) oder Nr. 81 (Gruppe 2) im Mathematik-Foyer.