Prof. Dr. Karl Friedrich Siburg
Martin Hülsmann

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

# 5. Hausaufgabenblatt zu “Gewöhnliche Differentialgleichungen“
# SS 2007, 7.5.2007

**Aufgabe 14** Es sei folgende DGL in Polarkoordinaten gegeben:

$$\dot{\theta} = 1 \text{ und } \dot{r} = \begin{cases} r^2 \sin \frac{1}{r} & , \quad r > 0 \\ 0 & , \quad r = 0 \end{cases} .$$

a) Zeichnen Sie das Phasenportrait in Polar- und kartesischen Koordinaten.

b) Zeigen Sie, dass der Ursprung eine stabile Gleichgewichtslösung ist.

c) Ist sie auch asymptotisch stabil?

**Aufgabe 15**

a) Zeigen Sie, dass die Defintion eines kritischen Punktes unabhängig von den jeweiligen Koordinaten ist, dass also eine Koordinatentransformation $\Phi$ einen kritischen Punkt wieder auf einen kritischen Punkt abbildet.

b) Zeigen Sie, dass die Definition eines Sattelpunktes unabhängig von den jeweiligen Koordinaten ist.

c) Zeigen Sie, dass Sattelpunkte stets isolierte kritische Punkte sind. (Hinweis: Betrachten Sie die 2. Ableitung als Differential der Gradientenabbildung.)

**Aufgabe 16** Es sei die DGL

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 2y^3 - 2y^4 \\ \dot{y} &= -x - y + xy \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $G(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$ eine Liapunov-Funktion $G$ und untersuchen Sie den Nullpunkt auf (asymptotische) Stabilität.

**Aufgabe 17** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $\sigma(A + A^T) < 0$. Zeigen Sie mit dem Satz von Liapunov, dass 0 asymptotisch stabiler Punkt der linearen DGL $\dot{x} = Ax$ ist.

**Abgabe**: Dienstag, 15.5.2007, bis 12:00 Uhr, in den Briefkasten Nr. 80 (Gruppe 1 und 3) oder Nr. 81 (Gruppe 2) im Mathematik-Foyer.