Prof. Dr. Karl Friedrich Siburg
Martin Hülsmann

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

6. Hausaufgabenblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen
SS 2007, 14.05.2007

Aufgabe 18 Es sei $\dot{x} = f(x)$.

a) Ist M positiv invariant, dann ist auch $\overline{M}$ positiv invariant.

b) Ist für eine Indexmenge I und eine Familie von Mengen $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ jedes M_α positiv invariant, dann ist auch $\bigcap\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$ positiv invariant.

c) Es sei $G \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\langle \nabla G(x), f(x) \rangle \leq 0$. Zeigen Sie, dass die Subniveaumenge $M := \{x : G(x) \leq c\}$ positiv invariant ist.

Aufgabe 19 Es sei die DGL

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + xy \\ \dot{y} &= x - xy - x^2 \end{cases}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Nullklinen und stationären Punkte und skizzieren Sie den Phasenraum.

b) Zeigen Sie anhand Ihrer Skizze, dass die folgenden Mengen positiv invariant sind:

1) Die Halbebene $H := \{(x, y) : x > 1\}$
2) ihre untere Hälfte $Q := \{(x, y) \in H : y < 0\}$
3) Deren Hälfte $P := \{(x, y) \in Q : y < 1 - x\}$

Aufgabe 20 Es seien

a)
$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1-r)(2-r) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1-r)^2(2-r) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$$

zwei DGL in Polarkoordinaten. Skizzieren Sie jeweils den Phasenraum in der x-y-Ebene und bestimmen Sie die $\omega-$Limesmengen.

Aufgabe 21 Es sei
$$\begin{cases} \dot{x} &= x(1 - 2x^2 - 3y^2) - 3y(1-x) \\ \dot{y} &= y(1 - 2x^2 - 3y^2) + 2x(1-x) \end{cases}$$
Transformieren Sie die DGL mit elliptischen Koordinaten und beweisen Sie, dass die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 = 1\}$ ein Attraktor mit Anziehungsbereich $\mathcal{A}(M) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist.

Abgabe: Dienstag, 22.05.2007, bis 12:00 Uhr, in den Briefkasten Nr. 80 (Gruppe 1 und 3) oder Nr. 81 (Gruppe 2) im Mathematik-Foyer.