Prof. Dr. Karl Friedrich Siburg
Martin Hülsmann

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

10. Hausaufgabenblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen
SS 2007, 12.06.2007

Aufgabe 30 Im restringierten Dreikörperproblem beschreibt (siehe Vorlesung) für $\mu = 0$ die Gleichung

$$\ddot{w} + 2i\alpha\dot{w} - \alpha^2 w = -\frac{w}{|w|^3}$$

die Bewegung des dritten Körpers in rotierenden Koordinaten.

a) Linearisieren Sie diese Gleichung. (Ergebnis : $\ddot{\xi} + 2i\alpha\dot{\xi} + \alpha^2\xi = \frac{1}{2}(\frac{1}{r^3}\xi + 3\frac{e^{2i\beta t}}{r^3}\bar{\xi}))$

b) Transformieren Sie die Gleichung durch $\eta = e^{-i\beta t}\xi$ in eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

c) Berechnen Sie die Floquet-Multiplikatoren der periodischen Lösung $w = re^{i\beta t}$.

Aufgabe 31 Zeigen Sie mit Hilfe eines Beispiels, dass es ohne weitere Voraussetzungen keine periodischen Lösungen in der Nähe eines Gleichgewichtpunktes zu geben braucht, selbst wenn das linearisierte System nur periodische Lösungen besitzt. Konstruieren Sie hierzu ein ebenes System $\dot{x} = f(x)$ mit $f(0) = 0$ und $\sigma(Df(0)) = \{\pm i\alpha\}$, welches überhaupt keine nichtkonstanten periodische Lösungen besitzt.

Aufgabe 32 Für $n \geq 2$ sei

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z_1} & = & i(nz_1 + \bar{z_2}^n) \\ \dot{z_2} & = & i(-z_2 + n\bar{z_1}\bar{z_2}^{n-1}) \end{array} \right. .$$

ein komplexes dynamisches System.

a) Zeigen Sie, dass $G(z_1, z_2) = n\|z_1\|^2 - \|z_2\|^2$ ein Integral für dieses System ist.

b) Bestimmen Sie die 4 Eigenwerte der reellen Linearisierung in 0. Sie können dazu das System reell schreiben. Sie können aber auch komplex argumentieren!

c) Bestimmen Sie die periodischen Lösungen des linearen Systems. Welche Bahnen lassen sich fortsetzen?

Abgabe: Dienstag, 19.06.2007, bis 12:00 Uhr, in den Briefkasten Nr. 80 (Gruppe 1 und 3) oder Nr. 81 (Gruppe 2) im Mathematik-Foyer.