

11. Hausaufgabenblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen SS 2007, 18.6.2007

Aufgabe 33 Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(x) = Ax$ für eine Matrix A . Zeigen Sie (siehe Vorlesung), dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- a) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = 0$.
- b) $|\sigma(A)| < 1$.
- c) Es gibt eine Norm $|\cdot|_A$ und ein $\mu < 1$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|Ax|_A \leq \mu |x|_A$$

gilt.

Aufgabe 34 Es sei B eine $(n \times n)$ -Matrix. Zeigen Sie, dass $\sigma(e^B) = e^{\sigma(B)}$ gilt.

Aufgabe 35 Es sei γ eine asymptotisch stabile periodische Bahn mit Periode T . Zeigen Sie, dass für alle Punkte x , die hinreichend nahe bei γ sind,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi^{T+t}(x) - \varphi^t(x)| = 0$$

gilt.

Aufgabe 36 Beweisen Sie Satz 6.9 aus der Vorlesung:

Es sei γ eine periodische Bahn mit Periode T . Gilt für ein $p \in \gamma$ und eine Poincaré-Abbildung Φ

$$|\sigma(D\Phi(p))| < 1,$$

so ist γ asymptotisch stabil.