Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IX
Prof. Dr. K. Menke

Funktionentheorie I

3. Übungsblatt, SS 2007

Aufgabe 1

Sei $S := \{z = x + i\,y \in \mathbb{C} \,|\, x \leq -1\,,\, y = 0\}$ und sei $G := \mathbb{C} \setminus S$. Man zeige:

1. $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ hat in G eine Stammfunktion F mit $F(0) = 0$. Man gebe die Taylor-Entwicklung von F um den Nullpunkt an.
2. $u(x, y) = \ln|z + 1|$ ist in G harmonisch und besitzt dort eine zu u konjugierte harmonische Funktion v mit $v(0) = 0$.
3. Es gilt Re $F = u$ in G.
4. Hat f sogar eine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus 0$? Hat dort $g(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$ eine Stammfunktion?

Aufgabe 2

Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ um den Nullpunkt in die Taylorreihe, bestimme deren Konvergenzradius und weise für $B_n = f^{(n)}(0)$ nach

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0 \quad (n \geq 1).$$

Aufgabe 3

Es sei $\mathcal{S} = \left\{z \;:\; |\mathrm{Re}\; z| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ und $f(z) = \tan z$. Zeigen Sie, daß f eine konforme Abbildung von $\mathcal{S}$ auf den Einheitskreis $\mathbb{D}$ ist.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die durch $\gamma(t) = (2 - \sin \pi t)e^{4\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$ gegebene Kurve, und bestimmen Sie $n(\gamma, a)$ für alle $a \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

Abgabe: 23.04.2007, 10 Uhr

Übungsblätter und Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ft/ss07/`