Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IX
Prof. Dr. K. Menke

Funktionentheorie I

4. Übungsblatt, SS 2007

Aufgabe 1

Die Automorphismengruppe Aut(G) eines Gebietes G ist die Menge aller konformen Selbstabbildungen von G. Zeigen Sie: $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ f : f(z) = e^{i\alpha} \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, z_0 \in \mathbb{D},\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.
Dabei sei $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, .

Hinweis: Benutzen Sie das Schwarzsche Lemma, um zu zeigen:

$$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})\,,\ f(0) = 0 \Rightarrow \text{ es gibt ein } \alpha \in \mathbb{R} \text{ mit} f(z) = e^{i\alpha} z \text{ für alle} \, z \in \mathbb{D}\,.$$

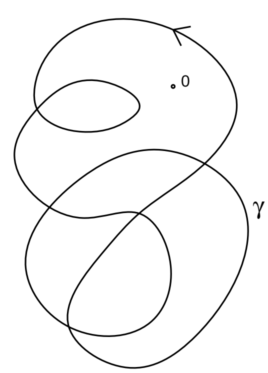
Man bestimme Aut$(\mathbb{H})$ mit $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}\ z > 0\}$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, daß es keine nicht-konstante holomorphe, nullstellenfreie Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gibt, für die $\lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| = 1$ ist für jede Folge (z_n) aus $\mathbb{D}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für die skizzierte (einfach durchlaufene) Kurve γ und alle nicht auf ihr liegenden Punkte a die Windungszahl $n(\gamma, a)$.



Aufgabe 4

Es sei z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f. Zeigen Sie:

a) Ist z_0 nicht hebbar, so besitzt $e^{f(z)}$ in z_0 eine wesentliche Singularität.

b) Sind Ref oder Imf um z_0 nach oben oder unten beschränkt, so ist z_0 eine hebbare Singularität von f.

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, daß $G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \ : \ z = te^{it}, \ t \geq 0\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

b) Begründen Sie, daß in G eine Stammfunktion $\log z$ von $\frac{1}{z}$ mit $\log 1 = 0$ existiert. Berechnen Sie $\log e$ und $\log e^2$.

c) Zeigen Sie die Existenz einer holomorphen Funktion $g(z) = \sqrt{z}$ mit $g^2(z) = z$ und $g(1) = 1$. Bestimmen Sie $g(9)$.

Aufgabe 6

Entscheiden Sie, ob es in den folgenden Beispielen eine im Gebiet D holomorphe Funktion g mit $\varphi \circ g = f$ gibt:

a) $f(z) = z^2 - 1, \ D = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, \infty[) \ , \ \varphi(w) = w^2$

b) $f(z) = \cosh z \ , \ D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \text{Re } z > 0\} \ , \ \varphi(w) = w^3$

c) $f(z) = z - 1 \ , \ D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1\} \ , \ \varphi(w) = e^w$

Abgabe: 7.05.2007, 10 Uhr

Übungsblätter und Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ft/ss07/`