

Funktionentheorie I

7. Übungsblatt, SS 2007

Aufgabe 1

Es sei $|\lambda| < 1$ und $B(z) = z \frac{z - \lambda}{1 - \bar{\lambda}z}$ für $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie:

a) $B(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

b) In einer Umgebung von 0 konvergiert die Iteriertenfolge $B_n = \underbrace{B \circ \dots \circ B}_{n \text{ mal}}$

gegen 0.

c) Es konvergiert $B_n \rightarrow 0$ lokal gleichmäßig in \mathbb{D} .

Aufgabe 2

Die Funktion f sei in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ holomorph und besitze in 0 eine wesentliche Singularität. Zeigen Sie, daß die Folge (f_n) mit

$$f_n(z) = f(2^{-n}z)$$

in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ nicht normal ist.

Aufgabe 3

Es sei f meromorph in \mathbb{D} und $\mathcal{F} = \{f \circ T : T \text{ ist Automorphismus von } \mathbb{D}\}$. Zeigen Sie: \mathcal{F} ist genau dann normal, wenn es eine Konstante $M > 0$ mit

$$f^\#(z) \leq \frac{M}{1 - |z|^2} \quad z \in \mathbb{D}$$

gibt.

Hinweis: Für solche Automorphismen T gilt $|T'(z)| = \frac{1 - |T(z)|^2}{1 - |z|^2}$ in \mathbb{D} .

Aufgabe 4

Es sei $\mathcal{F} = \{f : f(z) = az, a \in \mathbb{C}\}$, $h(z) = e^z \sin z$ und $\mathcal{H} = \{h \circ f : f \in \mathcal{F}\}$. Man zeige: In $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ ist \mathcal{F} normal und \mathcal{H} nicht normal.

Abgabe: 29.05.2007, 10 Uhr

Übungsblätter und Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter
<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ft/ss07/>