Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IX
Prof. Dr. K. Menke

Funktionentheorie I

8. Übungsblatt, SS 2007

Aufgabe 1

Mit Hilfe der Entwicklung von $\pi \cot \pi z$ zeige man

(a) $\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$

und bestimme hiermit den Wert von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$,

(b) $\dfrac{\pi}{\sin \pi z} = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$

(c) $\dfrac{1}{e^z - 1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2} \qquad z \neq 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$

Aufgabe 2

Konstruieren Sie eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion, die

a) einfache Pole bei $z = -n$ mit Residuum $\operatorname{Res}(f, -n) = n$

b) doppelte Pole bei $z = n$ mit Hauptteil $h_n(z) = \dfrac{n}{(z-n)^2}$

hat ($n = 1, 2, 3, \ldots$) und sonst holomorph ist.

Aufgabe 3

a) Mit Hilfe von Übungsblatt 3, Aufgabe 2 zeige man für $|z| < 1$:

$$\pi z \cot \pi z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}(-1)^k (2\pi)^{2k}}{(2k)!} z^{2k} ,$$

b) mit der Entwicklung $\dfrac{z^2}{n^2 - z^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}}$ für $|z| < n$ zeige man für $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{(2k)!} .$$

Abgabe: 04.06.2007, 10 Uhr

Übungsblätter und Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ft/ss07/`