

Funktionentheorie I

10. Übungsblatt, SS 2007

Aufgabe 1

Für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ gilt

$$\sin \pi(z + a) = \sin \pi a \cdot e^{\pi z \cot \pi a} \cdot \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n + a}\right) e^{-\frac{z}{n + a}}.$$

Hieraus gewinnt man leicht die Produktdarstellung von $\cos \pi z$.

Aufgabe 2

Man kann

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{n^4}\right)$$

durch elementare Funktionen ausdrücken, woraus

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{8\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

folgt.

Aufgabe 3

Es gilt die Produktdarstellung

$$e^z - 1 = ze^{z/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right).$$

Aufgabe 4

Es sei (p_n) die Folge der Primzahlen. Es gilt für $\operatorname{Re} z > 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (= \zeta(z))$$

und es folgt hieraus die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$.

Abgabe: 18.06.2007, 10 Uhr

Übungsblätter und Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter
<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsex/uebungen/ft/ss07/>