Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IX
Prof. Dr. K. Menke

Funktionentheorie I

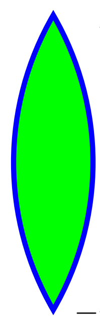
11. Übungsblatt, SS 2007

Aufgabe 1

Sei G das Kreisbogenzweieck, das von den beiden Kreisbögen

$$\gamma(s) = \sqrt{3} + 2 \cdot \mathrm{e}^{is} \ , \ \frac{5\pi}{6} \leq s \leq \frac{7\pi}{6} \quad \text{und } \Gamma(t) = -\sqrt{3} + 2 \cdot \mathrm{e}^{it} \ , \ -\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}$$

berandet ist.



Gesucht ist die konforme Abbildung $f : G \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$. Berechnen Sie $f'(0)$.
Hinweis: Bilden Sie zunächst die Eckpunkte i und $-i$ von G mit einer Möbiustransformation auf 0 und ∞ ab.

Aufgabe 2

Das einfach zusammenhängende Gebiet $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ enthalte den Punkt ∞ und besitze mindestens zwei Randpunkte. Zeigen Sie, daß genau eine konforme Abbildung

$$f : \Delta = \hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}} \to G$$

mit $f(\infty) = \infty$ und $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{f(z)}{z} > 0$ existiert.

Aufgabe 3

Die auf $\hat{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion $J(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ heißt Joukowski-Abbildung.

1. J ist schlicht in $\mathbb{D}$, und J ist schlicht in $\Delta = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, und es gilt

$$J(\mathbb{D}) = J(\Delta) = \hat{\mathbb{C}} \backslash [-1, 1] \ .$$

   Gesucht sind die jeweiligen Umkehrfunktionen.

2. Sei $S(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}\right)$. Man bezeichnet $k := S \circ J$ als die Koebe-Funktion, wie sieht $k(\mathbb{D})$ aus?

3. Wie sehen Bilder von Kreisen aus, bei denen 1 auf dem Rande und -1 im Innern liegen, unter J aus?

Abgabe: 25.06.2007, 10 Uhr

Übungsblätter und Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ft/ss07/`