Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IX
Prof. Dr. K. Menke

Funktionentheorie I

12. Übungsblatt, SS 2007

Aufgabe 1

Die Funktion f sei holomorph in $K_R(0)$ für ein $R > 1$ und injektiv auf $\partial\mathbb{D}$. Man zeige, daß dann f die Einheitskreisscheibe konform auf das von $f(\partial\mathbb{D})$ berandete beschränkte Gebiet abbildet. Hiermit folgere man, daß $f(z) = ze^z$ in $\mathbb{D}$ schlicht ist und skizziere $f(\mathbb{D})$..

Aufgabe 2

a) Sei $\gamma(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{i\varphi(t)}$ mit auf $[0,1]$ stetigen Funktionen r und φ mit $r(0) = r(1)$, $\varphi(0) = \varphi(1)$ und $0 < r(t) < 1$ für $t \in [0,1]$. Dann ist γ bez. $\mathbb{D}^* = \mathbb{D}\backslash\{0\}$ nullhomotop.

b) Sei ein geschlossener Weg γ gegeben durch $\gamma(t) = (t^2 - t + 1)\,e^{16\pi i t^2(1-t)}$, $0 \le t \le 1$. Man zeige daß γ nullhomolog bez. $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ ist.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f_0(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ in der Kreisscheibe

$$D_0 = \{z : |z-1| < 1\}\ .$$

a) Es gilt $f_0(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ für $z \in D_0$, wobei das Integral wegunabhängig ist.

b) f_0 besitzt um $z_1 = e^{2\pi i/8}$ die Entwicklung

$$f_1(z) = \frac{2\pi i}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{(z-z_1)^n}{z_1^n}$$

und es ist f_1 die analytische Fortsetzung von f_0 in die Kreisscheibe

$$D_1 = \{z : |z - z_1| < 1\}\,.$$

c) Bilden Sie sukzessive die weiteren Fortsetzungen f_k von f_{k-1} nach

$$D_k = \{z : |z - z_k| < 1\},\ z_k = e^{2\pi i k/8}$$

für $k = 2, \ldots, 8$.

d) In $D_0 = D_8$ gilt $f_8(z) = f_0(z) + 2\pi i$.

Abgabe: 2.07.2007, 10 Uhr

Übungsblätter und Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ft/ss07/`