Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
SS 2007

0. Übung zur Linearen Algebra II

(A) Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und χ_A das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) $\chi_A = X^n$;

ii) $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$;

Aufgabe 2:
Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $A \in K^{n\times n}$, so ist λ^k ein Eigenwert von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 4:
Zeigen Sie: Ist $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, so gibt es ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad kleiner gleich $n-1$, so dass $A^{-1} = f(A)$.

(B) Hausaufgaben: (Einwurf bis Dienstag, den 10.04. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen)

Aufgabe 5: **3+3 Punkte**
Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenräume der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der beiden Matrizen sind diagonalisierbar?

Aufgabe 6: **4 Punkte**
Es sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie: Hat $f^2 + f$ den Eigenwert -1 hat, so hat f^3 den Eigenwert 1.

Aufgabe 7: **4 Punkte**
Seien $A, B \in K^{n\times n}$ zwei Matrizen, die jeweils nur Eigenwerte der geometrischen Vielfachheit 1 besitzen. Zeigen Sie: Gilt $AB = BA$, dann haben A und B die gleichen Eigenvektoren.

Aufgabe 8: **2+2+2 Punkte**

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Falls A diagonalisierbar ist, berechnen Sie eine invertierbare Matrix P, so dass $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.

b) Es sei (u_n), $n \in \mathbb{N}$, die durch $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ rekursiv definierte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$A^{n+1} \quad = \quad \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} , \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$u_n = (\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5} \ ,$$

wobei $\alpha := (1 + \sqrt{5})/2$ und $\beta := (1 - \sqrt{5})/2$.