UNIVERSITÄT DORTMUND
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
SS 2007

1. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Dienstag, den 17.04. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Aufgabe 1: **6 Punkte**
Sei $V = \langle 1, x, x^2 \rangle$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 2 über dem Körper $\mathbb{R}$.
Die Abbildung $\varphi : V \to V$ sei gegeben durch

$$\varphi(a + bx + cx^2) = (-b + c) + (-3a - 2b + 3c)x + (-2a - 2b + 3c)x^2.$$

a) Ist φ diagonalisierbar?

b) Wenn φ diagonalisierbar ist, bestimmen Sie eine Basisfolge B von V, so dass die darstellende Matrix ${}_B[\varphi]_B$ Diagonalgestalt hat.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von φ.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

1. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_{a,b} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar?

2. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $A_{a,b}$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus.
Zeigen Sie: Ist jeder Vektor $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ ein Eigenvektor von φ, so existiert ein $\alpha \in K$ mit $\varphi = \alpha \cdot \mathrm{id}_V$.

Aufgabe 4: **3 Punkte**
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus.
Zeigen Sie:

$$\chi_\varphi(0) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ ist Isomorphismus.}$$