Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
SS 2007

2. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Dienstag, den 24.04. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Aufgabe 1: **3+3 Punkte**

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in {\mathbb{Z}_2}^{5\times 5}.$$

a) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P \in {\mathbb{Z}_2}^{5\times 5}$ so dass $P^{-1}AP$ in Jordan-Normalform ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es sei f ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom $\chi_f(t) = (t+3)^2(t-4)^4$. Bestimmen Sie (bis auf eventuelle Spaltenvertauschungen) alle möglichen Jordan-Normalformen von f.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Für zwei natürliche Zahlen $k, l \in \mathbb{N}_0$ seien $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{n\times n}$ zwei Matrizen mit $a_{ij} = 0$ falls $j \leq i - 1 + k$ und $b_{ij} = 0$ falls $j \leq i - 1 + l$.

a) Es sei $C = (c_{ij}) = AB$. Zeigen Sie, dass $c_{ij} = 0$ falls $j \leq i - 1 + k + l$.

b) Interpretieren Sie die Aussage für die Fälle $k = l = 0$ und $k = l = 1$.

Aufgabe 4: **2+2+2 Punkte**

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *nilpotent*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass A^n die Nullmatrix ist.

Es sei $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

a) Zeigen Sie, dass B nilpotent ist und bestimmen Sie das Minimalpolynom von B.

b) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von B.

c) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ so dass $P^{-1}BP$ in Jordan-Normalform ist.