Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

3. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Montag, den 30.04. 2007, um 16 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume. Wir definieren die zu $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ "duale" Abbildung

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*, \quad \lambda \longmapsto f^*(\lambda) := \lambda \circ f.$$

a) Zeigen Sie, dass f^* linear ist.

b) Seien $A = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ und $B = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$ Basisfolgen von V bzw. W mit entsprechenden dualen Basisfolgen A^* und B^*.
Zeigen Sie

$$_{A^*}[f^*]_{B^*} = (_B[f]_A)^T.$$

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W^*, V^*), \quad f \longmapsto f^*$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Gegeben sei der Teilraum $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ des $\mathbb{R}^5$.

Bestimmen Sie eine reelle Matrix A, so dass $U = \mathrm{Kern}(A)$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum, $A = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ eine Basisfolge von V und Φ eine Bilinearform auf V mit

$$[\Phi]_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $B = (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3)$ eine Basis von V ist und bestimmen Sie $[\Phi]_B$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \geq 0 \quad$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

(ii) die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ ist konvex .

(Die Matrix A heißt dann *positiv semidefinit.*)

Zur Erinnerung: Die Abbildung f ist konvex, wenn $f(\alpha \boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{y}) \leq \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1 - \alpha) f(\boldsymbol{y})$ für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in [0, 1]$ gilt.