Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

4. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Dienstag, den 8.05. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ die durch

$$\Phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) := 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 - 2x_3y_3$$

gegebene Bilinearform auf V.

a) Berechnen Sie die Matrix $A = [\Phi]_B$, wobei B die Standardbasis von V bezeichnet.

b) Berechnen Sie das Links- und Rechtsradikal von Φ.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es sei $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens 3 und Φ eine symmetrische Bilinearform auf V gegeben durch

$$\Phi(f, g) := f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1) \ , \qquad f, g \in V.$$

a) Bestimmen Sie die Menge der Vektoren, die bzgl. Φ isotrop sind.

b) Bestimmen Sie die Matrix $[\Phi]_B$, wobei $B = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ mit $p_i(x) = x^i$ ($x \in \mathbb{R}$) ist.

c) Berechnen Sie eine Basis für $\langle p_0, p_1 \rangle^\perp$ (bzgl. Φ)..

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{64 \times 64}$ in Jordan-Normalform mit $a_{ii} = 3$ für $i = 1, \ldots, 64$, die aus zwei Jordanblöcken der Grösse fünf, fünf Jordanblöcken der Grösse vier, acht Jordanblöcken der Grösse drei, zwei Jordanblöcken der Grösse zwei und sechs Jordanblöcken der Grösse eins besteht.

a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $(A - 3E_{64})^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 4: **7 Punkte**

Es sei V ein K-Vektorraum und $\Phi : V \times V \to K$ eine Bilinearform.
Man nennt eine Familie $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r)$ aus V *orthonormal bzgl.* Φ, wenn gilt

$$\Phi(v_i, v_j) \;=\; \delta_{ij} \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass eine orthonormale Familie linear unabhängig ist.

Sei nun Φ eine Bilinearform auf V, so dass bzgl. Φ jede orthonormale Familie zu einer orthonormalen Basis von V erweitert werden kann, und $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r)$ eine bzgl. Φ orthonormale Familie.

b) Zeigen Sie, dass Φ symmetrisch ist.

c) Zeigen Sie, dass Φ nicht ausgeartet ist.

d) Zeigen Sie, dass Φ total anisotrop ist.

e) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r)$ ist Basis von V;

(ii) Für $\boldsymbol{v} \in V$ folgt aus $\Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, r$, dass $v = 0$;

(iii) Ist $\boldsymbol{v} \in V$, so ist $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{r} \Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i$;

(iv) Für alle $v, w \in V$ ist $\Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{r} \Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_i)\Phi(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w})$;

(v) Für alle $\boldsymbol{v} \in V$ gilt $\Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{r} |\Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_i)|^2$;