Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

5. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Dienstag, den 15.05. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Symmetrische, total anisotrope Bilinearformen sind eine wichtige Klasse der Bilinearformen. In dieser Aufgabe stellt sich heraus, dass solche Bilinearformen über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ allerdings uninteressant sind. Ihre Aufgabe: Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ alle symmetrischen, total anisotropen Bilinearformen $\Phi : \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ und beweisen Sie, dass Sie wirklich alle gefunden haben.
Hinweis: Es gibt insgesamt (also für alle n zusammen) nur endlich viele.

Aufgabe 2: **2+3 Punkte**

a) Es sei B die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Die Bilinearform $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch die Gram-Matrix

$$[\Phi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 6 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie mit Hilfe von geeigneten Elementarumformungen eine invertierbare Matrix P, so dass $P^T[\Phi]_B P$ Diagonalgestalt hat.

b) Es sei B die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$. Die Bilinearform $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch die Gram-Matrix

$$[\Phi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

und außerdem seien die Basisfolgen $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ und $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{w}, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ gegeben durch

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf C bezüglich Φ an.

ii) Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf D bezüglich Φ an. Warum scheitert das Verfahren nach dem zweiten Schritt?

Hinweis 1: Da Sie in b) mehrfach Werte der Form $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ für gleiches $\mathbf{h}$ aber unterschiedliche $\mathbf{x}$ berechnen müssen, ist es hilfreich, erst $\lambda_{\mathbf{h}} := [\Phi]_B \mathbf{h}$ zu berechnen und bei Bedarf darauf zurückzugreifen.
Hinweis 2: Zur Kontrolle, in b) i) liegt der dritte Vektor in $< \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T >$.

Aufgabe 3: **3+1 Punkte**

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix.

a) Sei Φ die Bilinearform auf V, deren Gram-Matrix in der Standardbasis gleich E_n ist. Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten von A orthogonal bezüglich Φ sind.

b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass a) nicht für jede beliebige Bilinearform Φ gilt.

Aufgabe 4: **3 + 1 + 2 Punkte**

Wir befinden uns im $\mathbb{R}^2$. Die konvexe Hülle von $m \in \mathbb{N}$ Vektoren (Punkten) $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge

$$C := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{p}_i : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \text{ und } \alpha_i \geq 0 \,\forall i \right\}$$

Insbesondere ist jedes α_i nach oben auch durch 1 beschränkt. Anschaulich besteht die konvexe Hülle von zwei Punkten aus allen Punkten auf deren Verbindungslinie. Für mehr als zwei Punkte liegt auch alles was "zwischen" mehreren Punkten liegt in der konvexen Hülle.

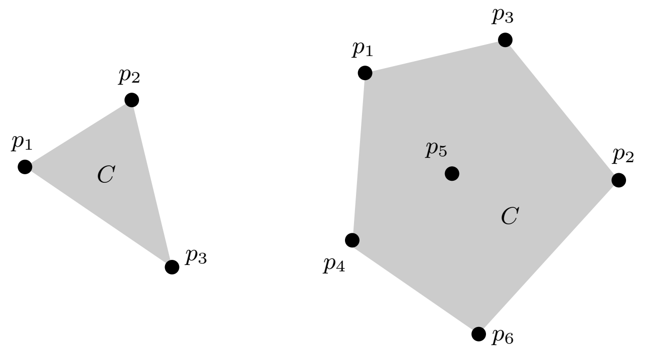

Abbildung 1: Beispiele für konvexe Hüllen

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ eine beliebige Bilinearform und $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor.

Wir suchen nun einen Punkt $\hat{\mathbf{x}} \in C$, so dass $\Phi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{h})$ maximal (bzw. minimal) ist unter all den Punkten in C, d.h. es soll gelten

$$\Phi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{h}) \geq \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{h}) \quad \forall \mathbf{v} \in C$$

beziehungsweise

$$\Phi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{h}) \leq \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{h}) \quad \forall \mathbf{v} \in C.$$

a) Ein wichtiger Satz der linearen Optimierung sagt, dass wir in beiden Fällen $\hat{\mathbf{x}}$ als einen der Eckpunkte $\mathbf{p}_i$ wählen können (im Normalfall aber nicht den gleichen Punkt für das Maximum und das Minimum). Beweisen Sie diesen Satz.

b) Konkret sind nun die Eckpunte

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Bilinearform Φ ist gegeben durch $[\Phi]_B = E_2$ bezüglich der Standardbasis B des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{h})$ für $\mathbf{v} \in C$.

c) Für konstantes $k \in \mathbb{R}$ beschreibt

$$L := \{\mathbf{x} : \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = k\}$$

eine Gerade im $\mathbb{R}^2$. Finden Sie für C, Φ und $\mathbf{h}$ wie in Aufgabe b) ein k, so dass diese Gerade nicht durch C geht (d.h. $L \cap C = \emptyset$ soll gelten). Finden Sie außerdem ein k, so dass $L \cap C \neq \emptyset$ ist und geben Sie einen konkreten Punkt in $C \cap L$ in der Schreibweise $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{p}_i$ an.