Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

6. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Dienstag, den 22.05. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es sei $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens 2 und Φ die durch

$$\Phi(f,g) \ := \ \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\cdot g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \ , \qquad f,g \in V,$$

definierte symmetrische Bilinearform auf V.

a) Zeigen Sie mit Mitteln der Analysis, dass Φ positiv definit ist.

b) Berechnen Sie mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis von V. Sie dürfen dazu

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2} \text{ und } \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

verwenden. (Die Integralgrenzen sind mit Absicht 0 und 1. Sie sollen ein Hinweis sein.)

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $||\,.\,|| : V \to \mathbb{R}_+$, die die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(N1) $||\boldsymbol{v}|| = 0$ genau dann, wenn $\boldsymbol{v} = 0$.

(N2) $||c\boldsymbol{v}|| = |c| \cdot ||\boldsymbol{v}||$ für alle $\boldsymbol{v} \in V$ und $c \in \mathbb{R}$.

(N3) $||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}|| \leq ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{w}||$ für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ein positiv definites Skalarprodukt Φ durch die Vorschrift

$$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{\Phi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{v} \in V$$

eine Norm auf V induziert.

a) Zeigen Sie, dass die durch Φ induzierte Norm die *Parallelogramm-Gleichung*

$$||\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}||^2 + ||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}||^2 = 2||\boldsymbol{v}||^2 + 2||\boldsymbol{w}||^2$$

erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ auf dem $\mathbb{R}^n$ durch

$$||\boldsymbol{x}|| = \max\{|x_i| \mid i = 1,\ldots,n\}$$

eine Norm definiert ist, für die kein positiv definites Skalarprodukt $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ und $\Phi : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V. Weiter sei $f : V \to V$ eine *beliebige* Abbildung mit $\Phi(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w})) = \Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$. Zeigen Sie:

a) $(f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n))$ ist eine Basis von V.

b) f ist ein Endomorphismus auf V.
Hinweis: Betrachten Sie beispielsweise $\Phi(f(s \cdot \boldsymbol{v}) - s \cdot f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w}))$ für $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ und $s \in K$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n und Φ ein positiv definites Skalarprodukt auf V. Weiter sei $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ mit $m \leq n$ eine Familie von Vektoren aus V. Die *Gram-Determinante* zu $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ ist definiert als

$$G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) = \det\left((\Phi(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j))_{1 \leq i,j \leq m}\right) \in \mathbb{R}.$$

a) Sei $m = n$. Zeigen Sie, dass $G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) \geq 0$ ist und Gleichheit genau dann gilt, wenn die Familie $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ linear abhängig ist.

b) Zeigen Sie a) auch für $m < n$.