Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
SS 2007

7. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Dienstag, den 29.05. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Am Donnerstag, den 24. Mai findet an Stelle der Übung von 8:15 bis 9:00 Uhr eine Vorlesung im HS 5 statt. Am Freitag 25. Mai endet die Vorlesung dafür schon um 9:00 Uhr. Die zweite Hälfte der üblichen Vorlesungszeit (ab 9:00 Uhr) wird dann für die Übung genutzt.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Welche der folgenden Funktionen $\Psi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sind Sesquilinearformen? Welche der Sesquilinearformen sind hermitesch und welche der hermiteschen Sesquilinearformen sind unter welchen Bedingungen positiv definit?

a) $\Psi_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \sum_{i=1}^n v_i + \sum_{i=1}^n w_i$

b) $\Psi_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \boldsymbol{v}^T \overline{\boldsymbol{w}}$

c) $\Psi_3(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \mathrm{Re}(\boldsymbol{v}^T \overline{\boldsymbol{w}})$

d) $\Psi_4(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := f(\boldsymbol{v})^T \overline{f(\boldsymbol{w})}$ für einen Endomorphismus $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei $V = \mathbb{C}^4$ ein unitärer Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt Ψ. Es seien

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ -1+i \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 2+2i \\ -1-2i \\ -1-i \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-2i \\ 0 \\ 2-2i \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie für die beiden Teilräume $U_1 :=< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >$ und $U_2 :=< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 >$ jeweils Orthonormalbasen C_1 und C_2.

b) Bestimmen Sie für die Basisfolge $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ von U_1 die Gram-Matrix von $\Psi|_{U_1} : U_1 \times U_1 \to \mathbb{C}$, das heißt die Gram-Matrix von Ψ eingeschränkt auf U_1.

c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix ${}_B[\mathrm{id}]_{C_1}$. Berechnen Sie mit der Formel aus der Vorlesung dann die Gram-Matrix $[\Psi|_{U_1}]_{C_1}$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt Φ. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und f^* adjungiert zu f. Zeigen Sie:

$$V = \mathrm{Kern} f^* \oplus \mathrm{Bild} f.$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt Φ. Ein Endormorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt *anti-selbstadjungiert*, falls $\Phi(f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = -\Phi(\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{w}))$ für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$. Zeigen Sie, dass f genau dann anti-selbstadjungiert ist, wenn $\Phi(f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{v} \in V$ ist.