Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

8. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Dienstag, den 05.06. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Der Mathematikstudent S ersteigert bei einem bekannten Internetauktionshaus zu Beginn jedes Semesters eine sehr große Menge Kekse zu einem besonders günstigen Preis. In den ersten Wochen des Semesters ernährt er sich dann ausschließlich von diesen Keksen. Als Tierfreund hat er sich bereits daran gewöhnt, dass sein Vorrat sich auch bei den unvermeidlichen Mäusen M in der WG herumspricht. Dadurch ergibt sich erfahrungsgemäß ein quadratischer Verlust an Keksen in Abhängigkeit von der Zeit. (Die Mäuse werden immer mutiger und essen jeden Tag etwas mehr von den Keksen.)

Dieses Semester ist aber ein neuer Bewohner B in die WG von S eingezogen. Seitdem kommt es S so vor, als ob sich außer den Mäusen noch jemand an seinen Keksen bedient. S verdächtigt den neuen Mitbewohner B, dass dieser sich jeden Tag eine gewisse gleich bleibende Menge Kekse nimmt. Deshalb beginnt S nun jeden Tag seine Kekse zu zählen und notiert folgende Fehlstände:

Tag t	3	4	5	6	7	8
Gesamt fehlende Kekse $f(t)$	9.5	14	20	26.5	34	41.5

Helfen Sie S, den B zu überführen, indem Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine Funktion der Form mt^2 und eine der Form $mt^2 + bt$ bestimmen, die jeweils möglichst gut zu den Messdaten $f(t)$ passen. Wieso ist es unwahrscheinlich, dass nur die Mäuse M für den Schwund verantwortlich sind? Wieviele Kekse stiehlt B mutmaßlich jeden Tag? (Hinweis: Wenige Nachkommastellen Genauigkeit genügen für die Rechnungen.)

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit $AA^T = E_n$, d.h. A ist orthogonal. Zeigen Sie, dass A eine Diagonalmatrix ist und dass auf der Diagonale nur die Zahlen ± 1 stehen.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Gegeben ist die folgende reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten 2 und -4. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt, die aus Eigenvektoren von A besteht, falls dies möglich ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sind die folgenden Aussagen wahr? Falls ja, geben Sie einen kurzen Beweis an, sonst ein Gegenbeispiel.

a) Das charakteristische Polynom jeder reellen symmetrischen Matrix zerfällt in nicht notwendigerweise verschiedene Linearfaktoren.

b) Das Minimalpolynom jeder reellen symmetrischen Matrix zerfällt in verschiedene Linearfaktoren.

c) Zu jeder symmetrischen komplexen Matrix A existiert eine Orthonormalbasis B (für das Standardskalarprodukt des unitären Vektorraums), so dass die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi_A]_B$ des zugehörigen Endomorphismus φ_A Diagonalgestalt hat.