Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

9. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Dienstag, den 12.06. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Aufgabe 1: **7 Punkte**

Gegeben sei eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die aber nun über $\mathbb{C}$ betrachtet wird.

a) Zeigen Sie: Eine reelle orthogonale Matrix aufgefasst über $\mathbb{C}$ ist unitär.

b) Zeigen Sie: Wenn $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor von A zu dem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ ist, so ist $\overline{\boldsymbol{v}}$ ein Eigenvektor von A zu dem Eigenwert $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$.

c) Angenommen beim Bestimmen der Nullstellen von χ_A in $\mathbb{C}$ findet man eine reelle Nullstelle, also einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A. Wieso kann man zu λ immer einen reellen Eigenvektor finden? Geben Sie zwei ganz unterschiedliche Beweise an!

d) Wieso kann man zu einem Eigenvektor $\boldsymbol{v}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ stets zwei linear unabhängige reelle Vektoren finden, die $U := \langle \boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}} \rangle$ aufspannen? Welche Gestalt hat die Darstellungsmatrix von $\varphi|_U$ in dieser reellen Basis (nach Orthonormierung der Basis)?

Aufgabe 2: **7 Punkte**

Gegeben ist die orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & -1 \\ 1 & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & -1+\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1+\frac{1}{\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Es soll nun die "orthogonale Normalform" laut §10 Satz 2 bestimmt werden. D.h. gesucht ist eine orthogonale Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine reelle Blockdiagonalmatrix ist, die nur aus 1×1-Blöcken der Form (± 1) und 2×2-Blöcken der Form $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ mit $\theta \in [0, 2\pi)$ besteht.
Dazu:

a) Fassen Sie A als Matrix über $\mathbb{C}$ auf und bestimmen Sie die komplexen Eigenwerte und Basen der Eigenräume. Zur Kontrolle: Einer der Eigenvektoren liegt in $\langle (\sqrt{2}+i, -\frac{1}{\sqrt{2}}+i, -\frac{1}{\sqrt{2}}+i)^T \rangle$.

b) Bestimmen Sie für die Eigenräume aller reellen Eigenwerte reelle Orthonormalbasen.

c) Bestimmen Sie für jeden Basisvektor $\boldsymbol{v}$ aus Teil a) zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ eine reelle Orthonormalbasis von $\langle \boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}} \rangle$.

d) Setzen Sie die Basis B aus den oben gefundenen Basen der Teilräume zusammen. Zeigen Sie, dass B wirklich eine Orthonormalbasis ist.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ und

$$H = \begin{pmatrix} X^3 + 3X + 1 & X(X+1) + 1 \\ 3 + 4X & 4X^2 + X \end{pmatrix} \in \mathbb{K}[X]^{2\times 2}.$$

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$, berechnen Sie $H(A)$.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Sei V ein beliebiger Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein bijektiver Endomorphismus. Sei U ein Teilraum von V mit $\dim U < \infty$. Zeigen Sie: U ist genau dann φ-invariant, wenn U auch φ^{-1}-invariant ist.