Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
SS 2007

11. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Dienstag, den 26. 06. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, also den kleinsten Teilring von $\mathbb{Q}$, der $\mathbb{Z}$ und $\frac{1}{2}$ enthält.

a) Zeigen Sie: Es gilt $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{2^{-n}z : n \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{Z}\}$ und $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ ist ein Integritätsring. (Hinweis: Vieles folgt bereits aus den Eigenschaften von $\mathbb{Q}$.)

b) Bestimmen Sie alle Einheiten von $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

c) Welche Paare der folgenden Elemente aus $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ sind assoziiert? $\frac{1}{8}, 3, 12, 16$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

a) Sei $R = \mathbb{Z}$ und $M = \{10 + 55z : z \in \mathbb{Z}\}$. Finden Sie ein "möglichst großes" Ideal I_1 mit $I_1 \subseteq M$ und ein "möglichst kleines" Ideal I_2 mit $M \subseteq I_2$. Genauer gesagt: Für jedes Ideal I' mit $I_1 \subseteq I' \subseteq M$ soll $I' = I_1$ folgen und analog aus $M \subseteq I' \subseteq I_2$ soll $I' = I_2$ folgen. Falls I_1 bzw. I_2 nicht existiert oder nicht eindeutig ist, begründen Sie, warum dies so ist.

b) Sei R ein Integritätsring und $M = \{r^2 : r \in R\}$. Beschreiben Sie alle Ringe R, in denen M ein Ideal ist und geben Sie ein Beispiel für einen solchen Ring an.

c) Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Sei $M := \{f \in K[X] : f(A) = \mathbf{0}\} \subseteq K[X]$. Zeigen Sie: M ist ein Ideal und es gilt $M = (\mu_A)$, wobei μ_A das Minimalpolynom von A ist.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Bestimmen Sie die Invariantenteiler der folgenden Matrizen über dem jeweiligen Ring R.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in R^{3\times 3}$ mit $R = \mathbb{Z}$.

b) $\begin{pmatrix} X^4 + X^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2 + X + 1 \end{pmatrix} \in R^{3\times 3}$ mit $R = \mathbb{Z}_2[X]$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

a) Sei R ein euklidischer Ring. Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ und $a_1, \ldots, a_n \in R$. Zeigen Sie, dass für beliebiges $d \in \mathrm{ggT}(a_{n-1}, a_n)$ gilt

$$\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_{n-2}, d).$$

b) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(4X^2 - 4X + 1, -2X + 1, 6X^2 - X - 1)$ über $R = \mathbb{Q}[X]$.