Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Prof. Dr. Martin Skutella
Britta Peis
Daniel Dressler

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
SS 2007

14. Übung zur Linearen Algebra II

Diese Aufgaben müssen nicht mehr abgegeben werden.

Bitte melden Sie sich noch in dieser Woche bei Ihrem Übungsleiter zur Klausur an!

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie mit einem Verfahren Ihrer Wahl eine Orthonormalbasis der folgenden Räume mit dem Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^n$:

a) $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$

b) Der von den Zeilen einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erzeugte Raum.

Aufgabe 2:
Es sei $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad höchstens 3 und

$$\Phi(p,q) := \frac{1}{4}(p(1)+p(-1))(q(1)+q(-1)) - \frac{1}{4}(p(1)-p(-1))(q(1)-q(-1))$$

eine Bilinearform auf V.

1. Bestimmen Sie für die Basis $B = (1, x, x^2, x^3)$ die Gram-Matrix $[\Phi]_B$.
2. Überprüfen Sie, dass Φ symmetrisch ist und bestimmen Sie das (Links/Rechts-)Radikal von Φ.
3. Bestimmen Sie den Rang und die Signatur von Φ. (Für die Signatur können Sie entweder die Eigenwerte von $[\Phi]_B$ bestimmen oder auf $[\Phi]_B$ gleichzeitig Spalten- und Zeilenoperationen anwenden, so dass eine Diagonalmatrix entsteht.)

Aufgabe 3:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit n unterschiedlichen möglicherweise komplexen Eigenwerten. Von A seien bereits $n-1$ linear unabhängige reelle Eigenvektoren $v_1, \dots, v_{n-1}$ bekannt.
Dann ist A im Reellen diagonalisierbar.
Welche der folgenden Beweisideen führen zu diesem Ziel, welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort, indem Sie die Beweise vervollständigen bzw. falsche Ansätze widerlegen.

a) Einfacher geht's wohl nicht: Polynomdivision anwenden auf χ_A!

b) Ganz klar: Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander, also müssen die Vektoren aus $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}^\perp$ weitere reelle Eigenvektoren sein!

c) Trivial: Es kann nicht bloß einen komplexen Eigenwert geben, aber für zwei ist auch kein Platz mehr!

Aufgabe 4:
Es sei Φ eine Bilinearform des $\mathbb{R}^3$, so dass die folgenden Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Orthonormalbasis bezüglich Φ bilden:

$$v_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Gram-Matrix von Φ in der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.