Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 12.04.2007, 10.15 h

# Lineare Algebra und analytische Geometrie II für Lehramt Gymnasium

## SS 2007 Übungsblatt 1

**Aufgabe 1 Ein einzigartiger Kern**
Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ zwei Matrizen mit $\chi_A(x) = -x^3 + 2x^2 - x$ und $\chi_B(x) = -x^3 + 7x^2 - 9x + 3$. Zeigen Sie, dass der Kern von $A \cdot B$ die Dimension 1 hat!

**Aufgabe 2 Eigentümlich, eigensinnig, eigenwertlos**

a) Sei $K$ ein Körper und seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}!$$

b) Finden Sie eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_3)$, die keine Eigenwerte hat!

**Aufabe 3 „Bäumchen wechsel dich“ ohne Folgen**
Sei $K$ ein Körper, sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und seien $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass $f \circ g$ und $g \circ f$ dieselben Eigenwerte besitzen!

**Aufgabe 4 Nur eine Frage des Charakters?**
Gibt es für einen Körper $K$ eine Zahl $n \geq 2$ mit $\underbrace{1 + 1 + \cdots 1}_{n-\text{mal}} = 0$, so heißt die kleinste solche Zahl die <u>Charakteristik</u> von $K$ und wird mit $\mathrm{char}(K)$ bezeichnet. Gibt es keine solche Zahl $n$, so sagen wir, $K$ sei ein Körper der Charakteristik null und schreiben $\mathrm{char}(K) = 0$.

Sei $K$ ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und sei $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$ mit $A^2 = I_2$. Beweisen Sie, dass entweder $A \in \{I_2, -I_2\}$ gilt oder es gibt ein $T \in \mathrm{GL}_2(K)$ mit $A = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot T^{-1}$!

**Aufgabe 5 T2swCoCoA**
Prüfen Sie mit Hilfe von CoCoA, ob die folgende Matrix diagonalisierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 6 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ -49 & -4 & -26 & 10 & 4 & 28 & -12 \\ -6 & 0 & 5 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -18 & 3 & 9 & -3 & -2 & -11 & 6 \\ 17 & -3 & -9 & 5 & 4 & 10 & -6 \\ 12 & 0 & -6 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -30 & 3 & 15 & -6 & -3 & -17 & 8 \end{pmatrix}!$$

Tipp: Verwenden Sie den Befehl `Factor(F)`, um ein Polynom in Faktoren zu zerlegen!