Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 19.04.2007, 14.00h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II für Lehramt Gymnasium

SS 2007 Übungsblatt 2

Aufgabe 1 Die Potenz der linken Multi-Kultis

Sei K ein Körper, sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und sei $f : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K),\ B \mapsto A \cdot B$ die Linksmultiplikation mit A.

a) Zeigen Sie: $\chi_f(x) = (\chi_A(x))^n$

b) Wenn A diagonalisierbar ist, ist dann auch f diagonalisierbar? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 2 Aus eins mach zehn und zehn ist keins

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt **nilpotent**, wenn es ein $i \geq 1$ gibt mit $f^i = 0$.

a) Zeigen Sie, dass f genau dann nilpotent ist, wenn es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit $\mu_f(x) = x^j$!

b) Geben Sie für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ einen nilpotenten Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ an mit $\mu_f(x) = x^j$!

Aufgabe 3 Der Unterschied zwischen Polynomen und Menschen? Jedes Polynom hat Charakter!

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}!$$

Bestimmen Sie außerdem die Faktorisierungen dieser Polynome!

Aufabe 4 μ, χ, ξ : das kommt mir griechisch vor

Sei K ein Körper und $a, b \in K$ mit $a \neq b$. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\chi_A(x) = -(x-a)^3 \cdot (x-b)^2$ und $\mu_A(x) = (x-a)^3 \cdot (x-b)$ gilt!

Aufgabe 5 Garbage in, CharPoly out!

Implementieren Sie eine CoCoA-Funktion `CharPoly(A)`, die als Eingabe eine quadratische Matrix A erwartet und das charakteristische Polynom dieser Matrix berechnet und ausgibt!