

Lineare Algebra und analytische Geometrie II für Lehramt Gymnasium SS 2007 Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Hohe Potenzen ganz ohne Viagra

- a) Sei $A \in \text{Mat}_n(K)$ eine beliebige diagonalisierbare Matrix. Erfinden Sie ein geschicktes Verfahren, um A^m für beliebig große m zu berechnen!
- b) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$. Wenden Sie ihr Verfahren an, um A^{100} zu berechnen!

Aufgabe 2 Was ist klein, grün und dreieckig?

Zeigen Sie mit Induktion nach $n = \dim V$: Ist V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ ein nilpotenter Endomorphismus, so existiert eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(eine sogenannte echte obere Dreiecksmatrix)!

Aufgabe 3 Trigonalisieren = Matrizen in obere Drecksform bringen

Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen trigonalisierbar sind und geben Sie gegebenenfalls eine Transformationsmatrix an:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R}),$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{F}_5)!$$

Aufgabe 4 Bei Nebenwirkungen jagen Sie Ihren Arzt zum Apotheker

Es sei bekannt, dass man jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $\deg(p) \geq 1$ darstellen kann in der Form $p = c \cdot \ell_1 \cdots \ell_k \cdot q_1 \cdots q_m$ mit $c \in \mathbb{R}$, $\ell_i, q_j \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(\ell_i) = 1$, $\deg(q_j) = 2$ und q_j ohne Nullstelle.

- a) Beweisen Sie, dass es für jede \mathbb{R} -lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ einen f -invarianten Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $\dim_{\mathbb{R}}(U) \leq 2$.
- b) Zeigen Sie, dass es eine Basis B von \mathbb{R}^n gibt, so dass $M_B(f)$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & Q_m \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $Q_1, \dots, Q_m \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ besitzt, wobei Q_i die Matrix einer Drehung in \mathbb{R}^2 ist.

Aufgabe 5 Garbage in, Eigenwerte out!

- a) Implementieren Sie eine CoCoA-Funktion `EigenwertSystem(A)`, die als Eingabe eine quadratische Matrix A erwartet und eine Liste von Paaren ausgibt, wobei der erste Eintrag jeweils einen Eigenwert der Matrix und der zweite seine Vielfachheit enthält!
- b) Berechnen Sie mit dieser Funktion die Eigenwerte und ihre Vielfachheiten von

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{Q})$$

2)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{Q})$$