Prof. Dr. M. Voit SS 2007

Stochastik I

Blatt 2

Abgabetermin: Freitag, 20. April 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

Wiederholen Sie folgende Begriffe:
Siebformel, Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum, Gleichverteilung auf einer endliche Menge, Geburtstagsproblem, Zähldichte, Binomial- und Multinomialverteilung, geometrische Verteilung, Poisson-Verteilung, Verteilung der Fixpunkte zufälliger Permutationen.

Aufgabe 1

In einem Hörsaal befinden sich 200 Hörer. Sie werden nach Merkmalsgruppen eingeteilt, darunter A_1 männlich, A_2 Blutgruppe 0, A_3 Rechtshänder. Die Merkmale treten mit folgenden Häufigkeiten auf:

<table>
<tr><td>A_1
60 %</td><td>A_2
15 %</td><td>A_3
60 %</td></tr>
<tr><td>A_1 und A_2
5 %</td><td>A_1 und A_3
40 %</td><td>A_2 und A_3
10 %</td></tr>
<tr><td colspan="2">A_1 und A_2 und A_3 zugleich
1 %</td><td></td></tr>
</table>

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Hörer mindestens eines der drei Merkmale?

Aufgabe 2

Ein Würfel wird 24-mal unabhängig geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass:

a) jede Augenzahl dabei genau 4-mal auftritt;

b) die Eins genau 4-mal auftritt.

Aufgabe 3

In einer Stochastik-Vorlesung sitzen n Student(inn)en. Bestimmen Sie eine Formel für die W'keit p_n, daß mindestens zwei von Ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben. Gehen Sie dabei von einem Jahr mit 365 Tagen aus sowie der Tatsache, daß alle Tage gleichwahrscheinlich sind.
Bestimmen Sie (mit einem Rechner) das kleinste n, für das $p_n \geq 0,5$ gilt.
(Tipp: $n \in \{20, ..., 30\}$).

Aufgabe 4

Bei der Produktion von Bauteilen ist ein Teil mit einer Wahrscheinlichkeit 0,004 defekt.
Bestimmen Sie (eventuell unter Zuhilfenahme eines Rechners):

a) die Wahrscheinlichkeit, dass von 1000 Bauteilen **genau** 4 defekt sind;

b) die Wahrscheinlichkeit, dass von 1000 Bauteilen **maximal** 4 defekt sind;

c) eine Approximation für b) mithilfe einer passenden Poisson-Verteilung.

Aufgabe 5

Für die endlichen Mengen $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ bestimme man:

a) die Mächtigkeit der Menge $S(A, B) := \{f \in B^A : f \text{ surjektiv}\}$;

b) die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig herausgegriffene Funktion $f \in B^A$ surjektiv ist.

Aufgabe 6*

Im Speicher eines Computers sind $2^n - 1$ ($n \geq 1$) verschiedene Zahlen $a_1, ..., a_{(2^n-1)}$ in aufsteigender Reihenfolge gespeichert. Für eine Zahl x soll überprüft werden, ob $x \in A := \{a_1, ..., a_{(2^n-1)}\}$ gilt. Dazu wird x zuerst mit der in der Mitte liegenden Zahl $a_{2^{(n-1)}}$ verglichen. Hierbei können die folgenden Fälle eintreten:

a) $x = a_{2^{(n-1)}}$. In diesem Fall wird eine positive Antwort gegeben.

b) $x \neq a_{2^{(n-1)}}$ und $n = 1$. In diesem Fall wird eine negative Antwort gegeben.

c) $x < a_{2^{(n-1)}}$ und $n \neq 1$. In diesem Fall wird die Suchprozedur auf die Menge $\{a_1, ..., a_{(2^{(n-1)}-1)}\}$ angewandt.

d) $x > a_{2^{(n-1)}}$ und $n \neq 1$. In diesem Fall wird die Suchprozedur auf die Menge $\{a_{(2^{(n-1)}+1)}, ..., a_{(2^n-1)}\}$ angewandt.

Der Algorithmus terminiert nach maximal n Schritten.
Nun werde für x ein zufällig ausgewähltes Element aus A genommen (wobei eine Gleichverteilung auf A vorausgesetzt wird). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus nach genau k Schritten ($1 \leq k \leq n$) terminiert.