Prof. Dr. M. Voit | SS 2007

Stochastik I

Blatt 3

Abgabetermin: Freitag, 27. April 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

Wiederholen Sie folgende Begriffe:
Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Formel von Bayes, Produktexperiment.

Aufgabe 1

Bei der Übertragung eines Binärcodes kommen die Ziffern 0 und 1 in einem typischen Text mit Wahrscheinlichkeiten 3/7 und 4/7 vor.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Übertragungsfehler in einem Bit betrage
10^{-3} für die Übertragung von 0 statt richtig 1 und
$2 \cdot 10^{-3}$ für die Übertragung von 1 statt richtig 0.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein als 0 empfangenes Signal auch als 0 gesendet wurde.

Aufgabe 2

Ein Artikel wird in Massenproduktion von n Maschinen hergestellt, wobei die i-te Maschine mit Wahrscheinlichkeit $p_i \in]0,1[$ ein defektes Teil produziert und diese Maschine einen Anteil $c_i \in]0,1[$ an der Gesamtproduktion hat
($i = 1, \ldots, n$ mit $c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 1$).
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit,

a) dass ein aus der Gesamtproduktion zufällig herausgegriffenes Teil defekt ist;

b) dass ein defektes Teil der Gesamtproduktion von der ersten Maschine stammt.

c) dass ein weiteres zufällig herausgegriffenes Teil defekt ist unter der Bedingung, dass das erste herausgegriffene Teil defekt ist.

Aufgabe 3

a) Es sei P die geometrische Verteilung mit Index $p \in]0,1[$ auf $\Omega = \mathbb{N}$.
Zeigen Sie
(G) $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : \quad P(\{m+n+1\} | \{m+1, m+2, \ldots\}) = P(\{n+1\})$.

b) Zeigen Sie, daß jede Verteilung P auf $\Omega = \mathbb{N}$ mit $P(\{1\}) \in]0,1[$ und Eigenschaft (G) eine geometrische Verteilung sein muß.

c) Interpretieren Sie (G) anhand der Lebensdauer von Bauteilen.

Aufgabe 4

Bei einer Quizsendung kann ein Teilnehmer ein Auto gewinnen, das hinter einem von 10 Garagentoren versteckt ist. Hinter den restlichen Toren befindet sich nichts. Nachdem sich der Kandidat zufällig für ein Tor entschieden hat, öffnet der Quizmaster, der den Ort des Autos kennt, zufällig eine der leeren Garagen, aber nicht die des Kandidaten. Anschließend bietet er dem Kandidaten an, daß dieser doch seine bisherige Wahl überdenken möge und nochmals unter den nun 9 vorhandenen Toren neu wählen kann.
Klären Sie, ob es günstig für den Kandidaten ist, auf diesen Vorschlag einzugehen.
Bemerkung: Dieses Problem hat vor einigen Jahren in der nichtmathematischen Öffentlichkeit Diskussionen ausgelöst; siehe dazu auch das Buch des ZEIT-Redakteurs G. von Randow, Das Ziegenproblem; Denken in Wahrscheinlichkeiten; rororo, 1992.

Aufgabe 5

a) N Paare besuchen einen Tanzkurs. Wie groß ist - nach zufälligem Partnerwechsel - die Wahrscheinlichkeit, dass keine Dame mit ihrem eigenen Partner tanzt.

b) Kindergeburtstag: N Kinder bringen „Preise“ für eine Lotterie mit. Jedes Kind erhält genau einen Preis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Kinder ihren eigenen Preis gewinnen?

Aufgabe 6

Auf dem Laplaceschen W'raum mit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ bestimme man Ereignisse A, B, C so, dass:

a) A, B, C paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind;

b) C von A und B unabhängig, aber nicht von $A \cap B$ unabhängig ist.

c) Geben Sie ein Beispiel von Mengensystemen F_1, F_2 über $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, die unabhängig sind, wobei $\sigma(F_1)$ und $\sigma(F_2)$ nicht unabhängig sind.

Hinweis:

Homepage der Vorlesung:

http//www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/stochI-07.html