# Stochastik I

Blatt 4

Abgabetermin: Freitag, 04. Mai 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

**Wiederholen Sie folgende Begriffe:**
Unabhängigkeit von Mengensystemen, Produktexperimente, Modellierung gestufter Experimente, Polyasches Urnenmodell, Hypergeometrische Verteilung.

**Aufgabe 1**

In einer elektrischen Schaltung sind die vorhandenen Schalter unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$ geschlossen bzw. offen.
Modellieren Sie in den folgenden Fällen das Experiment auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, und bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass ein Strom von $A$ nach $B$ fließen kann:

a)

b)

c)

(Tipp: zu c): Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit auf mittleren Schalter anwenden!).

**Aufgabe 2**

Betrachten Sie das Polyasche Urnenmodell mit anfangs $w \in \mathbb{N}$ weißen und $s \in \mathbb{N}$ schwarzen Kugeln. Man ersetzt nun wie in der Vorlesung nach jeder Ziehung die gezogene Kugel durch $c+1$ Kugeln der gleichen Farbe mit $c \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Es werden $n \in \mathbb{N}$ Ziehungen durchgeführt.

a) Zeigen Sie, dass für alle Permutationen $\pi$ von $\{1, \ldots, n\}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \{s, w\}$
$P$ (Für $i = 1, \ldots, n$ ist $x_i$ die Farbe der i-ten Ziehung)
$= P$ (Für $i = 1, \ldots, n$ ist $x_{\pi(i)}$ die Farbe der i-ten Ziehung).

b) Für $c = 1,\ s = 10$ und $w = 15$ bestimme man die Wahrscheinlichkeit, dass bei der elften Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wird.

c) Für $c = -1,\ s = 10$ und $w = 15$ bestimme man die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass bei der zehnten Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wird unter der Bedingung, dass bei der elften ebenfalls eine schwarze Kugel gezogen wird.

**Aufgabe 3 Die verallgemeinerte hypergeometrische Verteilung**

Für $s, w \in \mathbb{R},\ s, w > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq min\{s, w\}$ ist die **verallgemeinerte** hypergeometrische Verteilung $H_{s,w;n}$ definiert als die Verteilung auf $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ mit Zähldichte

$$f_{s,w;n}(k) := \binom{s}{k}\binom{w}{n-k} / \binom{s+w}{n}.$$

(Dabei ist $\binom{s}{k} := \frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0,\ s \in \mathbb{C}$).
Zeigen Sie, das $f_{s,w;n}$ tatsächlich eine Zähldichte ist.
(Tipp: Die Aussage ist für einen Spezialfall bekannt!).

**Aufgabe 4 (Das Hardy-Weinberg-Theorem der Genetik)**

Ein Gen tritt in der menschlichen Bevölkerung in den Kombinationen $AA, Aa, aa$ als Genotypen mit den relativen Häufigkeiten $u, 2v, w > 0$ auf. (Es gilt also $u + 2v + w = 1$.) Ist das Gen nicht geschlechtsgebunden, so überträgt beim Fortpflanzungsvorgang jedes Elternteil ein Gen seines Genpaares, und zwar wird jedes der beiden Gene gerade mit Wahrscheinlichkeit $0,5$ ausgewählt, unabhängig vom anderen Elternteil. Hat etwa der Vater ein Genotyp $Aa$ und die Mutter $aa$, so hat der Nachkomme jeweils mit Wahrscheinlichkeit $0,5$ den Gentyp $Aa$ bzw. $aa$. Denkt man sich Vater und Mutter als unabhängig voneinander zufällig ausgewählt (was bei einem Gen, das keinen Einfluß auf die Partnerwahl hat, akzeptabel erscheint), so wird beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, daß Vater *und* Mutter Gentyp $aa$ haben, gerade $w^2$ sein.

a) Bestimmen Sie die relativen Häufigkeiten $u_1, 2v_1, w_1$ von $AA, Aa, aa$ in der ersten Generation von Nachkommen

b) Bestimmen Sie für beliebige $k \in \mathbb{N}$ die relativen Häufigkeiten $u_k, 2v_k, w_k$ von $AA, Aa, aa$ in der k-ten Generation von Nachkommen.
(Hinweis: Bestimmen Sie zuerst $u_2, 2v_2, w_2$, und schließen Sie dann auf den allgemeinen Fall.)

**Aufgabe 5**

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie:

a) Sind $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{A}$ unabhängig, so ist

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : P(A \cap C_1 \cap \ldots \cap C_n) = P(A)P(C_1) \ldots P(C_n)\}$$

ein Dynkin-System.

b) Ist $1 \leq k < n$, und bilden $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \subset \mathcal{A}$ eine unabhängige Familie $\cap$-abgeschlossener Mengensysteme, so sind $\mathcal{A}_1 := \sigma(\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k)$ und $\mathcal{A}_2 := \sigma(\mathcal{C}_{k+1} \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n)$ unabhängig.
(**Tipp:** Wenden Sie Satz 2.8 an auf
$\mathcal{A}_1 = \sigma(\{A_1 \cap \ldots \cap A_k : A_1 \in \mathcal{C}_1, \ldots, A_k \in \mathcal{C}_k\})$ und $\mathcal{A}_2$ entsprechend).

**Aufgabe 6*  Die Eulersche $\varphi$-Funktion**

Für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, sei $\varphi(n)$ die Anzahl der Zahlen aus $\Omega := \{1, \ldots, n\}$, die zu n teilerfremd sind.
P sei die Gleichverteilung auf $\Omega$, und $p_1, \ldots, p_r$ seien die Primteiler von $n$.
Zeigen Sie:

a) Die Mengen $(\{p_i, 2p_i, \ldots, \frac{n}{p_i} p_i\})_{i=1,\ldots,r}$ sind unabhängig.

b) $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_r})$.

# Klausurtermin:

# Donnerstag, 12.07.2007, Nachmittag