Prof. Dr. M. Voit SS 2007

Stochastik I

Blatt 5

Abgabetermin: Freitag, 11. Mai 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

Wiederholen Sie folgende Begriffe:
Zufallsvariable, Borel-σ-Algebra, Meßbare Abbildungen, Produkt-σ-Algebra, Bildmaß, Verteilung einer Zufallsvariablen.

Aufgabe 1

In einer Untersuchung der Dortmunder Mathematik-Studierenden wurden die folgenden Zahlen von Studenten bei den Merkmalen Haarfarbe und Schuhgröße ermittelt.

Haarfarbe / Schuhgröße	**schwarz**	**blond**	**sonstig**
bis 39	41	30	39
40 – 43	70	65	25
mind. 44	19	20	11

a) Bestimmen Sie die Verteilungen der Merkmale Schuhgröße und Haarfarbe.

b) Entscheiden Sie, ob die Merkmale Schuhgröße und Haarfarbe (im streng mathematischen Sinn) unabhängig sind.

Aufgabe 2

Entwickeln Sie für $s, w \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$(x+y)^{s+w} = (x+y)^s (x+y)^w$$

auf zwei Weisen in Potenzreihen um $x = 0$, und folgern Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{w}{n-k} = \binom{s+w}{n} \quad (n = 0, \ldots, s+w).$$

Wie hängt diese Formel mit der hypergeometrischen Verteilung zusammen?

Aufgabe 3

In einer Urne befinden sich $m \in \mathbb{N}$ weiße und in einer zweiten Urne K schwarze Kugeln.

Nun wird eine zufällige Zahl $L \in \{0, \ldots, m\}$ von weißen Kugeln der ersten Urne entnommen und in die zweite Urne gelegt. Nach Mischen der Kuglen in dieser Urne werden wieder L Kugeln aus dieser Urne gezogen und in die erste Urne gelegt. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der weißen Kugeln in der zweiten Urne nach dieser zweiten Ziehung.

Aufgabe 4

Zeigen Sie für eine höchstens abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$, dass $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{B}(A) = \mathcal{P}(A)$ gelten.

Aufgabe 5

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion.
Zeigen Sie:

a) Für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(I)$ ein Intervall.

b) f ist Borel-meßbar.

Aufgabe 6

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

a) Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist A von Ω unabhängig.

b) Es seien $A, B, C \in \mathcal{A}$. Ist A unabhängig von B und B von C, so ist A auch von C unabhängig.

c) Es seien $A, B, C \in \mathcal{A}$. Ist A unabhängig von B und von C, so ist A unabhängig von $B \cap C$ und $B \cup C$.

d) Es seien $A, B, C \in \mathcal{A}$. Ist A unabhängig von B, C und $B \cap C$, so ist A unabhängig von $B \cup C$ und von $B \cup \overline{C}$.

e) Für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf A.

f) Für jedes $A \subset \Omega$ ist $\mathcal{A}_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf A.

Aufgabe 7* Zusatzübung für früheren Stoff

a) In einer Urne befinden sich w weiße, r rote und s schwarze Kugeln. Es wird r Mal gezogen, α) ohne β) mit Zurücklegen.
Wie groß ist - im Fall α) bzw. β) - die Wahrscheinlichkeit,

a1) dabei k weiße Kugeln zu ziehen,

a2) beim k-ten Zug weiß zu ziehen,

a3) beim k-ten Zug erstmals weiß zu ziehen.
Stellen Sie geeignete Modelle auf! Zeigen Sie, dass es genügt, Modelle mit nur zwei Farben zu betrachten!

b) Mit einem Würfel wird fünf Mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle geworfenen Augenzahlen voneinander verschieden sind.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Roulette, dass nach dreißig Spielen alle erzielten Zahlen verschieden sind.