Prof. Dr. M. Voit SS 2007

Stochastik I

Blatt 7

Abgabetermin: Freitag, 25. Mai 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

Wiederholen Sie folgende Begriffe:
Meßraum, Maßraum, Wahrscheinlichkeitsraum, Maß und Prämaß, Fortsetzungssatz von Caratheodory, Verteilungsfunktion, Gleichverteilung auf einem Intervall, Normalverteilung, Exponentialverteilung.

Aufgabe 1 Die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilungen

a) Es sei P eine Exponentialverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zeigen Sie:
$\circledast \quad \forall x, t > 0 : \quad P(]x+t, \infty[\mid]t, \infty[) = P(]x, \infty[)$.

b) Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit einer stetigen Verteilungsfunktion F mit $F(0) = 0$, so dass $\circledast$ gilt.
Zeigen Sie, dass P eine Exponentialverteilung ist.
Tipp: (Für $x \in \mathbb{Q}, x > 0$ gilt $1 - F(x) = (1 - F(1))^x$.)

Aufgabe 2 Gamma-Verteilungen

a) Die Gamma-Funktion ist gegeben durch das uneigentliche Riemann-Integral

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \quad (t > 0).$$

Zeigen Sie:

i) $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t) \quad (t \geq 0)$. (Tipp: Partielle Integration).

ii) $\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}_0)$.

b) Die Gamma-Verteilung mit Parametern $\alpha, v > 0$ ist definiert als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit Lebesgue-Dichte

$$f_{\alpha,v}(x) = \begin{cases} c_{\alpha,v} \cdot x^{v-1} \, e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie mithilfe der Gamma-Funktion die Konstante $c_{\alpha,v} > 0$, so dass $f_{\alpha,v}$ die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist.

Aufgabe 3

Zwei Studenten gehen zwischen 13.00 und 14.00 Uhr zu einem zufälligen gleichverteilten Zeitpunkt unabhängig voneinander in die Mensa. Sie beschließen, jeweils genau 10 Minuten am Mensaeingang aufeinander zu warten.
Bestimmen Sie mit geometrischen Mitteln die Wahrscheinlichkeit für ein Zusammentreffen am Mensaeingang.

Aufgabe 4

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable mit den Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$.

a) Begründen Sie kurz, warum

$$m_n := \min(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{und} \quad M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$$

Zufallsvariable sind;

b) Drücken Sie die Verteilungsfunktionen von m_n und M_n mithilfe der Verteilungfunktionen $F_1, \ldots, F_n$ aus!

c) Zeigen Sie für unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ dass m_n und M_n Dichten haben. Bestimmen Sie diese Dichten!

Aufgabe 5

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $F \circ X : \Omega \to [0, 1]$ auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist.

Aufgabe 6

Es seien $P_1, \ldots, P_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf einen Meßraum $(\Omega)\mathcal{A}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$.

a) Zeigen Sie, dass $P(A) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; P_i(A) \quad (A \in \mathcal{A})$ ein Wahrscheinlichkeitmaß P auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert.

b) Überprüfen Sie, dass die Aussage in a) auch für $n = \infty$ korrekt ist.