

Stochastik I

Blatt 8

Abgabetermin: Freitag, 01. Juni 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

Wiederholen Sie folgende Begriffe:

Integration von Treppenfunktionen und L^1 -Funktionen; Auswertung von Integralen bei diskreten und kontinuierlichen Maßen, Erwartungswert, Varianz.

Aufgabe 1 Normalverteilungen

- Es seien X eine \mathbb{R} -wertige, $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $aX + b$ ebenfalls normalverteilt ist, und bestimmen Sie die passenden Parameter.
- Es sei X eine $N(1, 2)$ -verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie anhand der rückseitigen Tabelle $P(X \in [0, 2])$.
(Achtung: Rückseitige Tabelle bezieht sich auf $N(0, 1)$!)
- Für eine $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable X bestimme man die Dichte der $[0, \infty[$ -wertigen Zufallsvariablen X^2 und e^X .
- Bestimmen Sie $E(X^2)$ und $E(e^X)$.

Aufgabe 2 Gamma-Verteilungen

Es sei X eine $B_{n,p}$ Binomial-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie $E(e^X)$.

Aufgabe 3

Es seien $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariable mit

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1.$$

Überprüfen Sie, ob X und Y dieselben Verteilungen haben!

Aufgabe 4

Eine Borelmenge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sei mit der Borel σ -Algebra $\mathcal{B}(A)$ versehen. Es sei P_A ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(A, \mathcal{B}(A))$. Zeigen Sie, dass

$$P(B) := P_A(A \cap B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ definiert. Inwieweit ist die Binomialverteilung $B_{n,p}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} ?

Tabelle entnommen aus

U. Krengel, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Vieweg

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

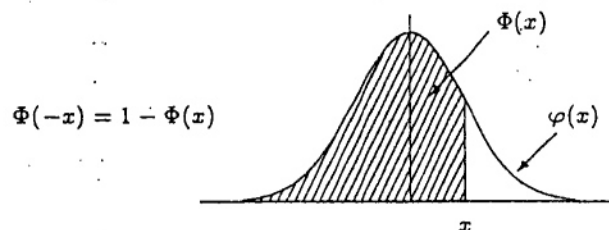


Tabelle II Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$. Ablesebeispiel:
 $\Phi(1,96) \approx 0,975$.