Prof. Dr. M. Voit SS 2007

Stochastik I

Blatt 9

Abgabetermin: Freitag, 08. Juni 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

Aufgabe 1

Die Lebensdauer X eines Bauteils sei geometrisch verteilt auf $\mathbb{N}$ mit Index $p \in]0,1[$.

a) Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktion g_X, $E(X)$, $Var(X)$ sowie einen Median.

b) Beim ersten Ausfall des Bauteils wird das Bauteil sofort durch ein baugleiches Teil ersetzt, dessen Lebenserwartung wieder geometrisch verteilt mit Index p und unabhängig von der Lebensdauer des ersten Bauteils sei.
Bestimmen Sie für den Zeitpunkt Y des Ausfalls des zweiten Teils $E(Y), Var(Y)$ und die Verteilung von Y.

Aufgabe 2

Im Polyaschen Urnenmodell mit anfangs s schwarzen und w weißen Kugeln wird n-mal eine Kugel gezogen mit $n \leq s + w$. Nach jeder Ziehung wird dabei die gezogene Kugel durch $(c + 1)$ Kugeln der gleiche Farbe ersetzt.
Dabei ist $c \geq -1$ ein Parameter.

a) Zeigen Sie, dass für $i = 1, \dots, n$ die Zufallsvariablen

$$X_i := \begin{cases} 1 & \textit{falls i-te Kugel schwarz} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

die gleiche Verteilung haben (vgl. § 2 der Vorlesung).

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der schwarzen Kugeln unter den n gezogenen Kugeln.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert einer $H_{s,w,n}$-hypergeometrisch verteilten Zufallsvariablen.

Aufgabe 3

Die Länge X eines zufällig auf der Straße gefundenen Blattes eines Baumes sei Beta-verteilt mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & x \in [0,1] \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie c so, dass f die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist.

b) Bestimmen Sie $E(X), Var(X)$ sowie den Median von X;

c) Die Fläche Y eines Blattes der Länge X sei $Y = \frac{1}{2}X^2$.
Bestimmen Sie die Dichte der Fläche Y eines zufälligen Blattes.
(Tipp: § 6.2 aus der Vorlesung!)

Aufgabe 4

Für eine mit den Parametern $a, v > 0$ Gamma-verteilte Zufallsvariable X bestimme man $E(X)$ (vgl. Aufgabe 2/Blatt 7).

Aufgabe 5 Cauchy-Verteilungen

a) Überprüfen Sie, ob für $\alpha > 0$

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

die Lebesgue-Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P_α auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Überprüfen Sie, ob für eine P_α-verteilte Zufallsvariable X der Erwartungswert $E(X)$ existiert.

Aufgabe 6

Es sei P die Gleichverteilung auf einer der folgenden Teilmengen A von $(\Omega, \mathcal{A}) := (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Entscheiden sie jeweils mit kurzer Begründung, ob die Koordinatenprojektionen $X_i : \Omega \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_i,\ (i = 1, 2)$ unabhängig sind:

a) $A = [-1, 1]^2$;

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| \leq 1\}$.

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Wie steht es mit der Unabhängigkeit von $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$ und $\frac{1}{2}(X_1 - X_2)$ in obigen Fällen?

Aufgabe 7

Überprüfen Sie, dass $P := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\ \delta_n$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ ist.
Existiert $E(X)$ für eine Zufallsvariable X mit Verteilung P?

Hinweise zur Klausur

- **Termin:** 12.07.2007, 16.00 - 19.00 Uhr im Raum E 29.
- **Nachklausur:** Ende Oktober, Details werden Anfang Oktober bekanntgegeben durch Aushang.
- Zur Klausur sind **keine** Hilfsmittel (Bücher / Skripte, etc.) zugelassen; ein Lichtbildausweis ist mitzubringen.
- Offizielle Anmeldung zur Klausur für BA/MA-Studierende:
  Persönliche Anmeldung bei Frau Rzepka, Raum 623, zwischen Mitte Juni bis Anfang Juli.
- Stoffumfang bei Lehramtsstudierenden, die die Veranstaltung als 2-Std. Vorlesung abrechnen:
  Vorlesung § 1 - 7
  Übungen: Blatt 1 - 9
  Klausurzeit verkürzt 16.00 - 18.00 Uhr, sonstige Details wie oben.
- **Hinweise zum Inhalt:**
- Sie sollten fähig sein, die wichtigsten Definitionen und Sätze niederzuschreiben und auf Beispiele anzuwenden.
- Die meisten Aufgaben werden Standardaufgaben sein, die sich am Übungsstoff anlehnen, aber natürlich eventuell etwas mathematische Phantasie benötigen.
- Es wird Aufgaben zur Statistik geben (Ausnahme: oben genannte Lehramtsstudierende), aber keine formalen Aufgaben zur Maß- und Integrationstheorie.