Prof. Dr. M. Voit SS 2007

Stochastik I

Blatt 10

Abgabetermin: Freitag, 15. Juni 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

Aufgabe 1

Ein Würfel wird 6000-mal unabhängig geworfen. Bestimmen Sie mit der T-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass die Eins zwischen 900-mal und 1100-mal geworfen wird.

Aufgabe 2

In einer Stichprobe mit 100 Studenten werden Körpergröße (auf 10 cm gerundet) und Schuhgröße wie folgt ermittelt:

	41	**42**	**43**	**44**
160	6	4	1	1
170	3	14	12	4
180	1	10	20	5
190	0	4	5	10

Bestimmen Sie die Verteilung der Schuhgröße sowie den Korrelationskoeffizienten zwischen Körper- und Schuhgröße.

Aufgabe 3 Numerische Integration mit Monte-Carlo-Methoden

Für $d \in \mathbb{N}$ und eine stetige Funktion

$$f : [0,1]^d \to [0,1]$$

soll $I := \int_{[0,1]^d} f(x)\, d\lambda^d(x)$ so gut wie möglich bestimmt werden.
Dazu wird angenommen, dass unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable $X_{n,i}$ $(n \in \mathbb{N}, i = 0, \dots, d)$ zur Verfügung stehen.

Prof. Dr. M. Voit SS 2007

Stochastik I

Blatt 10

Abgabetermin: Freitag, 15. Juni 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

Aufgabe 1

Ein Würfel wird 6000-mal unabhängig geworfen. Bestimmen Sie mit der T-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass die Eins zwischen 900-mal und 1100-mal geworfen wird.

Aufgabe 2

In einer Stichprobe mit 100 Studenten werden Körpergröße (auf 10 cm gerundet) und Schuhgröße wie folgt ermittelt:

	41	**42**	**43**	**44**
160	6	4	1	1
170	3	14	12	4
180	1	10	20	5
190	0	4	5	10

Bestimmen Sie die Verteilung der Schuhgröße sowie den Korrelationskoeffizienten zwischen Körper- und Schuhgröße.

Aufgabe 3 Numerische Integration mit Monte-Carlo-Methoden

Für $d \in \mathbb{N}$ und eine stetige Funktion

$$f : [0,1]^d \to [0,1]$$

soll $I := \int_{[0,1]^d} f(x)\, d\lambda^d(x)$ so gut wie möglich bestimmt werden.
Dazu wird angenommen, dass unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable $X_{n,i}$ $(n \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, d)$ zur Verfügung stehen.

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad X_{n,0} \leq f(X_{n,1}, \ldots, X_{n,d}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit $E(Z_n) = I$ sind.

b) Begründen Sie durch Angabe passender Fehlerabschätzungen, dass für hinrechend große $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen $S_n := 1/n(Z_1 + \ldots + Z_n)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit gute Approximationen für I sind (Tipp: T-Ungleichung).

c) Wie groß ist für $d = 50$ die Zahl n in etwa zu wählen, um I mit Wahrscheinlichkeit mindestens $0,999$ bis auf 3 Stellen genau zu bestimmen.
Wie groß ist dabei der Gesamtrechenaufwand?

Aufgabe 4
Sei P die Gleichverteilung auf dem Dreieck

$$\triangle := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0;\ x + y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann sind die Koordinatenprojektionen $X, Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $X(x, y) := x$, $Y(x, y) := y$ Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P)$.

a) Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $E(X \cdot Y)$ und $E(X|Y = y_0)$ für $y_0 \in [0, 1]$.

b) Entscheiden Sie, ob X und Y unabhängig sind.

c) Bestimmen Sie die Verteilungen von X und Y sowie die gemeinsame Verteilung von X und X.

d) Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie in folgenden Fällen $P * Q$ für Wahrscheinlichkeitsmaße P, Q auf $\mathbb{R}$:

a) P und Q sind Gleichverteilungen auf dem Intervall $[1, 3]$.

b) $P = Q = B_{n,p}$ (Binomialverteilung).

c) P Gleichverteilung auf $[0, 1]$, und $Q = \frac{1}{3}\,\delta_0 + \frac{2}{3}\,\delta_2$.

Aufgabe 6* Der Approximationssatz von Weierstraß
Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ betrachte man eine $B_{n,p}$-verteilte Zufallsvariable $X_{n,p} : \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $B_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ p \mapsto E(f(\frac{X_{n,p}}{n}))$ ist ein Polynom vom Grade $\leq n$, und es gilt
$\max\limits_{p \in I} \quad |B_n(p)| \leq \max\limits_{p \in I} |f(p)|$.

b) $P(|\frac{X_{n,p}}{n} - p| > \delta) \leq 1/4n\delta^2$ für $\delta > 0$.

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{p \in I} |B_n(p) - f(p)| = 0$.
(Tipp: f ist gleichmäßig stetig).