Prof. Dr. M. Voit SS 2007

Stochastik I

Blatt 11

Abgabetermin: Freitag, 22. Juni 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

Aufgabe 1 Beta-Verteilungen

Für $p, q > 0$ ist die Beta-Verteilung $\beta_{p,q}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $]0, 1[$ mit Dichte $f_{p,q}(x) = c_{p,q} \cdot (1 - x)^{p-1}\, x^{q-1}$.

a) Bestimmen Sie $c_{p,q}$ mithilfe der Gammafunktion.
(Hinweis: Lemma 7.18 der Vorlesung)

b) Bestimmen Sie $E(X)$ und $Var(X)$ für eine $\beta_{p,q}$-verteilte Zufallsvariable.

Aufgabe 2

In einer Schachtel befindet sich anfangs eine schwarze Kugel. In jeder Ziehung wird eine Kugel gezogen, die Farbe notiert, und die Kugel zurückgelegt. **Zusätzlich** werden nach der n-ten Ziehung n **zusätzliche** weiße Kugeln in die Schachtel gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a) in der n-ten Ziehung die schwarze Kugel gezogen wird;

b) bei unendlich vielen Ziehungen die schwarze Kugel unendlich oft gezogen wird.

Aufgabe 3

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ mit der Gleichverteilung P auf $[0, 1]$ sowie die Zufallsvariablen

$$X_{2^l+k} := \mathbf{1}_{[k2^{-l},(k+1)2^{-l}]} : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad (l \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le 2^l - 1).$$

Beachten Sie dabei, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig als $2^l + k$ darstellbar ist.

a) Skizzieren Sie die X_n für $n \in \mathbb{N}$ grob.

b) Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ für $n \to \infty$ gilt.

c) Entscheiden Sie, ob die X_n stochastisch gegen 0 konvergieren.

d) Entscheiden Sie, ob die X_n fast sicher gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 4

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge von Mengen.
Zeigen Sie:

a) $\liminf\limits_n A_n = \{\omega \in \Omega : \ \omega \in A_n$ für alle bis auf höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}\}$.

b) $\mathbf{1}_{\liminf\limits_n A_n} = \liminf\limits_n \mathbf{1}_{A_n}$.

Aufgabe 5

Es seien $X, Y : \Omega \to]0,\infty[$ unabhängige, $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable mit Dichten f und g.
Zeigen Sie, dass $X \cdot Y$ eine Dichte hat, und bestimmen Sie diese Dichte.

Aufgabe 6

a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $Y : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ sowie $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable mit folgenden Eigenschaften:

  i) $X_1, \ldots, X_n$ sind integrierbar mit $E(X_1) = E(X_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

  ii) $X_1, \ldots, X_n$ und Y sind unabhängig.

  Zeigen Sie, dass $S : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \sum_{i=1}^{Y(\omega)} X_i(\omega)$ eine Borel-meßbare Zufallsvariable ist mit $E(S) = E(Y)E(X_1)$.

b*) Nun sei $(X_{n,k})_{k\in\mathbb{N},\ n\geq 0}$ eine Familie unabhängiger, identisch verteilter, $\mathbb{N}_0$-wertiger Zufallsvariabler mit gemeinsamer Verteilung $P_X \in M^1(\mathbb{N}_0)$ und Erzeugendenfunktion g_X.
Definiere rekursiv die Zufallsvariablen

$$S_1 := X_{1,1},\ S_{n+1} := \sum_{k=1}^{S_n} X_{n,k} \quad (n \geq 1).$$

Zeigen Sie $E(S_n) = E(X_{1,1})^n$ und $g_{S_n}(t) = g_X^n\ (t) := g_X \circ \ldots \circ g_X(t)$.
Leiten Sie aus letzterer Formel eine Beziehung für $Var(S_n)$ her!

c*) Zeigen Sie in der Situation von b) für die Austerbewahrscheinlichkeiten $P(S_{n+1} = 0) = g(P(S_n = 0)) \quad (n \in \mathbb{N})$ und für $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{S_n = 0\}$:

$$P(E) = g(P(E)).$$

Bestimmen Sie $P(E)$ für $P_X = \frac{1}{4}\ \delta_0 + \frac{1}{4}\ \delta_1 + \frac{1}{2}\ \delta_2$.