Prof. Dr. M. Voit SS 2007

Stochastik I

Blatt 12

Abgabetermin: Freitag, 29. Juni 2007, 11.00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den ML-Schätzer für den Parameter:

a) $p \in [0,1]$ bei geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit Zähldichte $f_p(k) = p(1-p)^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N})$.

b) $p \in [0,1]$ bei negativ Binomialverteilten Zufallsvariablen mit Verteilung $NB_{r,p}$ auf $\mathbb{N}_0$ bei festem $r \in \mathbb{N}$.

c) $\alpha > 0$ bei Gamma-verteilten Zufallsvariablen mit Verteilung $\Gamma_{\alpha,\nu}$ bei festem $\nu > 0$.

d) $\mu \in \mathbb{R}$ bei Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte

$$f_\mu(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x-\mu|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

e) $M > 0$ für gleichverteilte Zufallsvariable auf den Intervallen $[0, M]$.

f) $M \in \mathbb{N}$ für Zufallsvariable, die auf den Mengen $\{1, 2, 3, \ldots, M\} \subset \mathbb{N}$ gleichverteilt sind.

Entscheiden Sie jeweils, ob die obigen Schätzer erwartungstreu sind.

Aufgabe 2 **Beispiele zur schwachen Konvergenz von Wahrscheinlichkeiten**

Zeigen Sie:

a) Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch $N(0,1)$-verteilter reellwertiger Zufallsvariabler.
Zeigen Sie, dass

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 - n\right)$$

in Verteilung gegen eine Normalveteilung $N(0, \sigma^2)$ konvergiert.
Bestimmen Sie σ^2!

b) Für $n \in \mathbb{N}$ und Folgen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}, (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset k$ mit

$$s_k, t_k \uparrow \infty \text{ und } \frac{s_k}{s_k + t_k} \to p \in]0,1[.$$

Konvergieren die hypergeometrischen Verteilungen H_{n,s_k,t_k} für $k \to \infty$ schwach gegen $B_{n,p}$.
Intepretieren Sie dieses Resultat anhand von Ziehungen mit/ohne Zurücklegen.

Aufgabe 3

Es seien $\mu_n, \mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$ Wahrscheinlichkeitsmaße so dass $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen μ konvergiert. Zeigen Sie für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, dass $(f(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $f(\mu)$ konvergiert.

Aufgabe 4 **(Schätzen des Umfangs einer Population)**

Um die Anzahl der Fische in einem Teich zu schätzen, werden r Fische gefangen, in geeigneter Weise markiert und danach wieder ausgesetzt. Einen Tag später werden n Fische gefangen, von denen k markiert sind.

a) Man zeige, dass die Anzahl k der am zweiten Tag gefangenen markierten Fische $H_{n,r,\theta-r}-$ hypergeometrisch verteilt ist, wobei θ die (unbekannte) Gesamtzahl aller Fische im Teich bezeichnet.

b) Bestimmen sie den ML-Schätzer für θ. Ist dieser Schätzer erwartungstreu?

c) Welche Schätzung ergibt sich in b) für $r = 100, n = 150$ und $k = 11$?

Aufgabe 5*

Man zeige, dass der Schätzer $\xi(k) := \frac{rk}{n}$ $(k \in \{0, \dots, n\})$ des Parameters $\vartheta \in \mathbb{N}_0$ einer $H_{n,r,\vartheta}$-verteilten Zufallsvariablen erwartungstreu $(n, r$ bekannt) ist, und dass ξ der einzige erwartungstreu Schätzer von ϑ ist.
(Hinweis: Für alle erwartungstreuen Schätzer ζ' und alle θ gilt $E_{P_\theta}(\zeta - \zeta') = 0$; löse nun das entsprechende Gleichungssystem!)

Hinweise zur Klausur

Wiederholen Sie insbesondere folgende Themen:

- Beispiele von wichtigen Verteilungen (Binomial, geometrisch, Poisson, normal, exponential, $\chi^2, \dots$);
- Arbeiten mit Unabhängigkeit, bedingten Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten;
- Bestimmung der Verteilung und Erwartungswert von $h(X)$ für Zufallsvariablen X;
- Verteilungen von Summen unabhängiger Zufallsvariabler, Gesetze der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz;
- Maximum-Likelihood, Erwartungstreue, Mittelwert- und Varianzschätzer, Konfidenzbereiche.