Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

2. Übungsblatt zu Analysis I
WS 2007/08, 22.10.2007

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie Supremum und Infimum von $\left\{ \frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{y^2+\frac{1}{y^2}} : x>0, y>0 \right\}$.

b) Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Bestimmen Sie das Supremum der Menge $A - B := \{a - b : a \in A \text{ und } b \in B\}$.

Aufgabe 6 Zeigen Sie für $0 < x < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ mit Induktion die Ungleichung:

$$(1-x)^n \le \frac{1}{1+nx}$$

Aufgabe 7 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^3 \le 3^n$? Beweis!

Aufgabe 8 Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k 2^{-k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+3} q^{k-1}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

Aufgabe 9 Es seien $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ für $1 \le j \le n$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_j b_k - a_k b_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2$$

gilt und folgern Sie daraus die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \le \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2.$$

Wann gilt Gleichheit?

Problem der Woche Bestimmen Sie die Summe $S = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2$. Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $((1+x)^n)^2 = (1+x)^{2n}$.

Abgabe: Dienstag, 28.10.2007, in den Übungen.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0708`