Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

4. Übungsblatt zu Analysis I
WS 2007/08, 6.11.2007

Aufgabe 14 Bestimmen Sie für $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt:

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ b) $a_n = \dfrac{2n^2 - n}{n^2 + 1} - 2$

Aufgabe 15 Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{4n^2 + 2n - 7}{n^2 - 3n + 1}$ b) $a_n = \dfrac{n-1}{(-1)^n n + 2}$ c) $a_n = \dfrac{n}{2^n}(1 + (-1)^n)$

d) $a_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1} - n$ e) $a_n = \dfrac{2n^3 + 12n^2 - (2 + in)^3}{i^n n + (3n - i)^3}$ f) $a_n = (1 + i)^n$

Aufgabe 16 Beweisen oder widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels) folgende Aussagen:

a) Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt, dann ist $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

b) Ist (a_n) konvergent und (b_n) divergent, dann ist $(a_n + b_n)$ divergent.

c) Ist (a_n) konvergent und (b_n) divergent, dann ist $(a_n b_n)$ divergent.

d) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 1$, so auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Aufgabe 17 Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen

$$a_n := \sqrt{n + 100000} - \sqrt{n} \qquad b_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \qquad c_n := \sqrt{n + \frac{n}{100000}} - \sqrt{n}$$

a) Berechnen Sie mit Ihrem Taschenrechner für große Werte von n die Zahlen a_n, b_n, c_n.

b) Zeigen Sie, dass $a_n \geq b_n \geq c_n$ für $n \leq 10^{10}$ gilt.

c) Berechnen Sie (falls existent) die Grenzwerte der Folgen $(a_n), (b_n)$ und (c_n).

Problem der Woche Berechnen Sie für $|x| < 1$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}).$$

Abgabe: Dienstag, 13.11.2007, in den Übungen.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0708`